المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (20) 2011
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الرابع كلية علوم الحاسوب والرياضيات
ص ص [570– 588]

نمـوذج خزين احتمالي مقيـد ومتعـدد العناصر

د.احمد محمود السبعاوي* غالية توفيق بشير**

المستخلص:

في هذا البحث تم تحليل نموذج خزين احتمالي متعدد العناصر Multi-Item , كلفـة الاحتفاظ بالخزين فيه تكون متغيرة (دالة في حجم الطلبية), مقيد بقيد غير خطي مفروض على هذه الكلفة. إذ إن الطلب أثناء فترة التوريد يكون متغيـراً عـشوائياً مـستمراً يتبـع بعـض التوزيعات الاحتمالية المـستمرة. ونـستخدم طريقـة مـضاعفات لاكـرانج (Lagrange Multipliers Method) لغرض المعالجة التحليلية للنموذج. كما تم في هذا البحث اسـتنتاج عدد من نماذج الخزين كحالات خاصة من النموذج قيد الدراسة.

A Constrained Probabilistic Multi-Item Inventory Model

Abstract

In this paper the probabilistic multi-item inventory model is derived when the holding cost is a function of the order quantity, and restricted by a non-linear restriction imposed on this cost. The demand during the lead time is a continuous random variable that follows some continuous distributions. Lagrange Multipliers Method has been applied for the purpose of the model analytical processing

* استاذ مساعد/ علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل
** طالبة ماجستير/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

تاريخ التسلم :2011/10/1 ———— تاريخ القبول : 21 /12 /2011

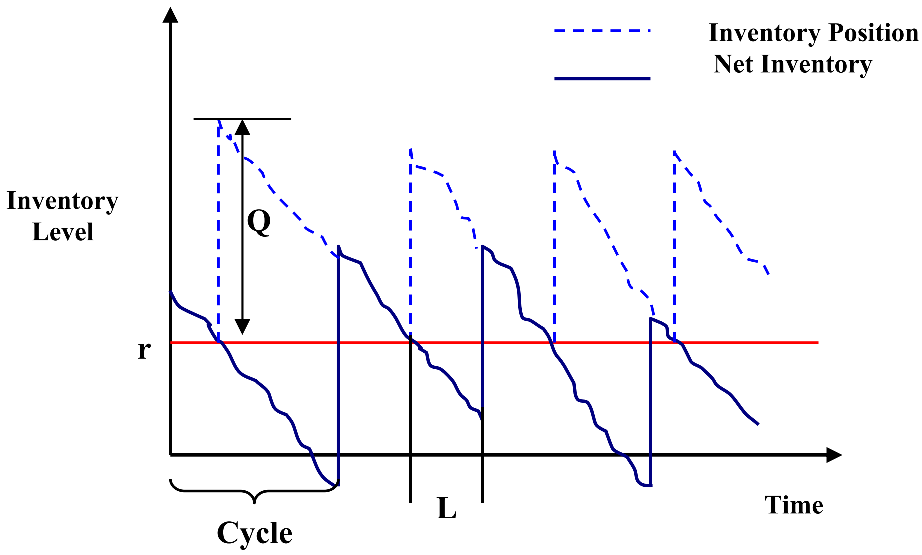
1- المقدمة:

تعتبر الرقابة على المخزون وإدارته من أهم التحـديات التـي تواجـه المؤسـسات الاقتصادية في عصرنا هذا, ومراقبة المخزون وإدارته بفاعلية يتوقف على عدد السلع وطبيعة الطلب على هذه السلع والزمن الفاصل بين استلام الطلبيات, وينتج عنه إما تعظيم الأربـاح أو تقليل تكلفة الاحتفاظ بالمخزون, إذ إن السيطرة ذات الكفاءة توجب عـدم الاحتفـاظ بكميـات فائضة عن الحاجة أو المتوقعة للمخزون. لأن هذا يؤدي إلى تكاليف لا مبرر لها [2]. ونماذج الخزين ذات المراجعة المستمرة والكلف الثابتة درست من قبل العديد مـن البـاحثين مـنهم Hadley G. و **F.R.** Richards و **H.A.** Taha . وتطـرق الباحـث Abuo-El-Ata وآخرون (2003) إلى دراسة نموذج خزين احتمالي متعدد العناصر Multi-Item بدون عجز كلفة إعداد الطلبية فيه تكون متغيرة, مقيد بقيدين واستخدموا أسلوب البرمجة الهندسية لمعالجة النموذج, واستنتجوا عدداً من الحالات الخاصة من النموذج المدروس. واقترح كل من Ben-Daya **M.** & Hariga **M.** (2004) خوارزمية لحل نموذج خزين احتمالي وافترضا أن فترة التوريد متغيرة إذ تكون هذه الفترة دالة خطية في حجم الطلبيـة ودرسـا تحليـل الحـساسية لاكتشاف تأثير المعلمات الرئيسة في حجم الدفعة ونقطة إعادة الطلبية والكلفة الكلية المتوقعة. وفي عام (2005) استخدمت الباحثة **H.A.** Fergany أسلوب البرمجة الهندسية لتحليل نموذج خزين احتمالي بدون عجز تتم فيه مراجعة المخزون مراجعة دورية مقيد بقيـدين خطيـين إذ عدت أن كلفة إعداد الطلبية تكون دالة في عدد الدورات. في حين اقترح الباحثان Fergany **H.A.** & El-Wakeel **M.F.** (2006) نموذج خزين احتمالي مقيد بقيد خطي مفروض علـى كلفة الاحتفاظ بالخزين, وكلفة إعداد الطلبية فيه تكون دالة في حجم الطلبية إذ تمـت معالجـة النموذج باستخدام طريقة مضاعفات لاكرانج. واهتم كل من Kopytov **E.** & Greenglaz **L.** (2007) بدراسة نماذج الخزين بكلف ثابتة إذ اقترحا نموذجين احتمـاليين إذ إن الطلـب وفترة توريد الطلبية في النموذج الأول يكونان متغيرين عشوائيين. أما في النموذج الثاني فإن فترة التوريد تكون ثابتة والطلب يكون متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بواسن, إذ استخدما أسلوب المحاكاة للسيطرة على الخزين. وفي عام (2009) تناول الباحث Lo M. دراسة نموذج خزين مراجعة مستمرة إذ عالج مسألة خصم سعر الطلب المتأخر واستنتج أنه بزيادة الحـد الأعلـى لنسبة الطلبات المتأخرة فإن الطلبات المتأخرة ومخزون الأمـان والكلفـة الكليـة الـصغرى المتوقعة تتناقص.

2- فرضيات النموذج Assumptions of the Model

إن فرضيات النموذج التي تم بناؤها في هذا البحث تكون موضحة بالشكل الآتي:

1. كلفة الوحدة الواحدة (C_o) تكون ثابتة ومستقلة عن حجم الطلبية Q_i .
2. نقطة إعادة الطلبية (reorder Point) تكون موجبة دائماً أي لا توجد طلبات متأخرة (Backorders) يتم تنفيذها عند هذه النقطة.
3. لا يوجد أكثر من طلبية واحدة فقط يتم تنفيذها في أي وقت.
4. معدل الطلب السنوي ثابت.
5. إن النظام يكرر نفسه في كل دورة إذ تتفاوت حالة الخزين (Inventory Position) بين r_i و $(r_i + Q_i)$ أثناء كل دورة.
6. الطلب (Demand) أثناء الدورة يكون متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمالية معلومة.



الشكل (1) يوضح سلوك نظام خزين ذا مراجعة مستمرة للمخزون [7]

3- رموز النموذج Notations of The Model

أما رموز النموذج التي تم استخدامها في هذا البحث فيوضحها الشكل الآتي:

(Q_i): حجم الطلبية (متغير قرار).

(Q_i^*): حجم الطلبية المثالي.

(r_i): نقطة إعادة الطلبية (متغير قرار).

(r_i^*): نقطة إعادة الطلبية المثلى.

(D_i): معدل الطلب السنوي المتوقع.

(K_i): كلفة إعداد الطلبية.

(h_i): كلفة الاحتفاظ بالخزين للوحدة الواحدة.

$h_i(Q_i) = h_i Q_i^{\beta}$ = كلفة الاحتفاظ بالخزين المتغيرة ، إذ إن $0 \le \beta \le 1$

(P_i): كلفة العجز للوحدة الواحدة.

(L): فترة توريد الطلبية.

(x): متغير عشوائي يمثل الطلب أثناء فترة توريد الطلبية.

(M): التقييد المفروض على كلفة الاحتفاظ بالخزين المتغيرة.

(n): عدد العناصر في النظام.

$f_i(x)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للطلب x.

$F_i(x)$: تمثل الدالة التراكمية للطلب x.

$R_i(x)$: تمثل الدالة المعولية ، إذ إن: $R_i(x) = 1 - F_i(x)$.

$\phi(\cdot)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي القياسي.

$\Phi(\cdot)$: تمثل الدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي القياسي.

$E(TC)$ الكلفة الكلية المتوقعة.

$\min E(TC)$ الكلفة الكلية المتوقعة الصغرى.

4- الكلفة الكلية السنوية المتوقعة [12],[7]

Expected annual Total Cost (E(TC))

هي الكلفة الناتجة من جمع كلفة إعداد الطلبية الـسنوية المتوقعـة وكلفـة الاحتفـاظ بالخزين السنوية المتوقعة وكلفة العجز السنوية المتوقعة ، أي إن:

$$E[TC(Q_1,\cdots,Q_n,r_1,\cdots,r_n)] = E(Setup\quad Cost) + E(Holding\quad Cost) + E(Shortage\quad Cost) \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

بما أن كلفة الوحدة الواحدة (C_o) ثابتة ومستقلة عن Q_i (فرضية 1) لذا فإنه ليس من الضروري إضافتها إلى النموذج, لذا فان حدود هذه الكلفة تكون على النحو الآتي:

$$\text{Expected annual Setup Cost} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i D_i}{Q_i}\right) \cdots\cdots (2)$$

$$\text{Expected annual Holding Cost} = \sum_{i=1}^{n} h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2} + r_i - \mu_i\right) \cdots\cdots (3)$$

$$\text{Expected annual Shortage Cost} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i D_i}{Q_i}\overline{S_i}(r_i)\right)\cdots\cdots(4)$$

$$\overline{S_i}(r_i) = \int_{r_i}^{\infty}(x-r_i)\, f_i(x) \quad dx\cdots\cdots(5)$$

إن هدف النموذج هو الحصول على أقل كلفة كلية ممكنة للمخزون وذلـك بتعـويض المعادلات (2)،(3)،(4) في المعادلة (1) فنحصل على دالة الهدف الموضحة صـيغتها أدنـاه والخاضعة لقيد على كلفة الاحتفاظ بالخزين المتغيرة:

$$\min E[TC(Q_1,...,Q_n,r_1,...,r_n)] = \min \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{K_i D_i}{Q_i} + h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i\right)+\frac{P_i D_i}{Q_i}\overline{S_i}(r_i)\right]\cdots(6)$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{n} h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i\right) \le \quad M\cdots\cdots(7)$$

ويتم الحصول على الحل العام للمعادلـة (6) تحـت القيـد (7) باسـتخدام طريقـة مضاعفات لاكرانج إذ إن صيغة دالة لاكرانج تكون على النحو الآتي:

$$L(Q_i,r_i,\lambda) = E[TC(Q_i,r_i)] + \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i\right)-M\right]$$

$$L(Q_i,r_i,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{K_i D_i}{Q_i} + h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i\right)+\frac{P_i D_i}{Q_i}\overline{S_i}(r_i)\right] + \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i\right)-M\right]\cdots\cdots(8)$$

إذ إن λ هي مضاعف لاكرانج.

ويتم الحصول على قيم Q_i^*, r_i^*, λ^* المثالية من خلال أخذ المشتقات الجزئية للمعادلـة (8) بالنسبة لـ Q_i, r_i, λ ومساواتها بالصفر.

$$\frac{\partial L(Q_i,r_i,\lambda)}{\partial Q_i} = -\frac{D_i K_i}{Q_i^2} + \frac{(1+\beta)h_i Q_i^{\beta}}{2} + h_i\beta Q_i^{\beta-1}(r_i-\mu_i) - \frac{P_i D_i}{Q_i^2}\overline{S_i}(r_i) + \frac{\lambda h_i(1+\beta)Q_i^{\beta}}{2} + \lambda h_i \beta Q_i^{\beta-1}(r_i-\mu_i)\quad\cdots\cdots(9)$$

$$(1+\beta)(1+\lambda)h_i Q_i^{2+\beta} - 2D_i K_i + 2h_i\beta(1+\lambda)(r_i-\mu_i)Q_i^{1+\beta} - 2P_i D_i \overline{S_i}(r_i) = 0 \qquad, i=1,2,.......n \qquad \cdots\cdots(10)$$

$$\frac{\partial L(Q_i,r_i,\lambda)}{\partial r_i} = h_i Q_i^{\beta} - \frac{P_i D_i}{Q_i} R_i(r_i) + \lambda h_i Q_i^{\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$R_i(r_i) = \frac{h_i(1+\lambda)Q_i^{1+\beta}}{P_i D_i} \qquad , i=1,2,\cdots,n \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\frac{\partial L(Q_i, r_i, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2} + r_i - \mu_i\right) - M \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

$$\sum_{i=1}^{n} h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2} + r_i - \mu_i\right) - M = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

ولإيجاد قيم Q_i^*, r_i^*, λ^* المثالية فإنه تم تطوير خوارزمية [7]Hadley and Whitin إذ يتم التوصل إلى الحل بعد عدد من التكرارات.

في حالة النماذج المقيدة التي تكون القيود فيها بشكل متباينات فإنه عادةً ما يتم اختبار القيد من حيث الفعالية قبل استخدام طريقة مضاعفات لاكرانج وذلك بإهمال القيد وحل النموذج والحصول على قيم Q_i^*, r_i^* المثالية ثم اختبار القيد فإذا كان القيد فعالاً فانه يتم استخدام طريقة مضاعفات لاكرانج للحصول على الحل العام لدالة الهدف والقيد الموضحين فـي المعـادلتين (6),(7) على الترتيب ، أما إذا كان القيد غير فعالٍ فهذا يعني أن القيد ليس له أهمية ويمكـن إهماله.

5- الخوارزمية المقترحة الأولى لاختبار القيد

The First Suggested Algorithm to Test Constraint

الخطوة (1): إدخال قيم $(D_i, K_i, h_i, \mu_i, P_i)$ إذ إن $(i=1,2,\ldots\ldots,n)$.

الخطوة (2): نفرض أن $r_i = \mu_i$ و $\overline{S_i}(r_i) = 0$ **و** $\lambda = 0$.

الخطوة (3): إدخال قيمة β.

الخطوة (4): إيجاد قيمة $Q_i(1)$ من المعادلة

$$Q_i(1) = \left(\frac{2D_iK_i}{(1+\beta)h_i}\right)^{\frac{1}{2+\beta}}$$

الخطوة (5): نجد قيمة $R_i(r_i(1))$ من المعادلة

$$R_i(r_i(1)) = \frac{h_i\, Q_i^{1+\beta}(1)}{P_iD_i}$$

الخطوة (6): إدخال قيمة $r_i(1)$ و $\overline{S_i}(r_i(1))$.

الخطوة (7): إيجاد قيمة $Q_i(2)$ من المعادلة

$$(1+\beta)h_i\, Q_i^{2+\beta}(2) - 2D_iK_i + 2h_i\beta(r_i(1) - \mu_i)\,Q_i^{1+\beta}(2) - 2P_iD_i\overline{S_i}(r_i(1)) = 0$$

الخطوة (8): إيجاد قيمة $R_i(r_i(2))$ من المعادلة

$$R_i\left(r_i(2)\right)=\frac{h_i\,\overset{1+\beta}{\underset{i}{Q(2)}}}{P_iD_i}$$

الخطوة (9): إدخال قيمة $r_i(2)$ و $\overline{S_i}\left(r_i(2)\right)$.

الخطوة (10): إذا كانت $\left|r_i(2)-r_i(1)\right|>\varepsilon$ اذهب إلى الخطوة (7) أما إذا كانت $\left|r_i(2)-r_i(1)\right|\leq\varepsilon$ فاذهب إلى الخطوة (11).

الخطوة (11): أطبع قيم Q_i^*, r_i^* .

الخطوة (12): إيجاد M1 من المعادلة

$$\sum_{i=1}^{n} h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i\right)=M1$$

الخطوة (13): إدخال قيمة M .

الخطوة (14): إذا كانت $M1 \leq M$ اذهب إلى الخطوة (15) أما إذا كانت $M1 > M$ فهذا يعني إن القيد فعال ويجب استخدام طريقة مضاعفات لاكرانج.

الخطوة (15): إيجاد قيمة $\min E[TC(Q_1,\ldots,Q_n,r_1,\ldots r_n)]$ من المعادلة

$$\min E\left[TC\left(Q_1,\ldots,Q_n,r_1,\ldots,r_n\right)\right]=\min\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{K_iD_i}{Q_i}+h_iQ_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i\right)+\frac{P_iD_i}{Q_i}\overline{S_i}\left(r_i\right)\right]$$

6- الخوارزمية المقترحة الثانية لحل النموذج المقيد

The Second Suggested Algorithm for Constrained Model Solution

الخطوة (1): إدخال قيم $(D_i, K_i, h_i, \mu_i, P_i)$ إذ إن $(i=1,2,\ldots\ldots,n)$.

الخطوة (2): نفترض أن $r_i=\mu_i$ و $\overline{S_i}\left(r_i\right)=0$.

الخطوة (3): إدخال قيمة β.

الخطوة (4): إدخال قيمة أولية لـ λ.

الخطوة (5): إيجاد قيمة $Q_i(1)$ من المعادلة

$$Q_i(1)=\left(\frac{2D_iK_i}{(1+\beta)h_i(1+\lambda)}\right)^{\frac{1}{2+\beta}}$$

الخطوة (6): نجد قيمة $R_i\left(r_i(1)\right)$ من المعادلة

$$R_i\left(r_i(1)\right)=\frac{h_i(1+\lambda)\overset{1+\beta}{\underset{i}{Q(1)}}}{P_iD_i}$$

الخطوة (7): إدخال قيمة $r_i(1)$ و $\overline{S_i}\left(r_i(1)\right)$.

الخطوة (8): إيجاد قيمة $Q_i(2)$ من المعادلة

$$(1+\beta)(1+\lambda)h_i \overset{2+\beta}{\underset{i}{Q(2)}} - 2D_iK_i + 2h_i\beta(1+\lambda)(r_i(1)-\mu_i)\overset{1+\beta}{\underset{i}{Q(2)}} - 2P_iD_i\overline{S_i}(r_i(1)) = 0$$

الخطوة (9): إيجاد قيمة $R_i(r_i(2))$ من المعادلة

$$R_i(r_i(2)) = \frac{h_i(1+\lambda)\overset{1+\beta}{\underset{i}{Q(2)}}}{P_iD_i}$$

الخطوة (10): إدخال قيمة $r_i(2)$ و $\overline{S_i}(r_i(2))$.

الخطوة (11): إذا كانت $|r_i(2)-r_i(1)| > \varepsilon$ اذهـب إلـى الخطـوة (8) أمـا إذا كانـت $|r_i(2)-r_i(1)| \le \varepsilon$ فاذهب إلى الخطوة (12).

الخطوة (12): اطبع قيم Q_i^*, r_i^*.

الخطوة (13): إيجاد M1 من المعادلة

$$\sum_{i=1}^{n} h_i Q_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2} + r_i - \mu_i\right) = M1$$

الخطوة (14): إدخال قيمة M .

الخطوة (15): إذا كانت M1~=M اذهب إلى الخطوة (4) إذ يتم إدخال قيمة جديـدة لـ ـ λ فإذا كانت M1>M فإننا نقوم بإدخال قيمة جديدة لـ λ بحيث إن λ(new) > λ أما إذا كانـت M1<M فإننا نقوم بإدخال قيمة جديدة لـ λ بحيث إن λ(new) < λ أما إذا كانـت M1=M فهذا يعني أن قيم λ, r_i, Q_i التي تم الحصول عليها مثالية.

الخطوة (16): إيجاد قيمة $\min E[TC(Q_1,\ldots,Q_n,r_1,\ldots r_n)]$ من المعادلة

$$\min E[TC(Q_1,\ldots,Q_n,r_1,\ldots,r_n)] = \min\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{K_iD_i}{Q_i} + h_iQ_i^{\beta}\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i\right) + \frac{P_iD_i}{Q_i}\overline{S_i}(r_i)\right]$$

علماً ان الخوارزمية المقترحة الأولى لاختبار القيد هي حالة خاصة من الخوارزمية المقترحة الثانية عندما تكون قيمة $\lambda = 0$.

7- التوزيع الاحتمالي للطلب

Probabilistic Distribution for Demand

في هذه الفقرة سوف تتم دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية للطلب على افتـراض أن الطلب متغير عشوائي مستمر.

1. الطلب يتبع التوزيع المنتظم

Demand Follows Uniform Distribution

افترض أن الطلب (x) أثناء فترة التوريد متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمالية:

$$f_i(x;a_i,b_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{b_i-a_i} & a_i<x<b_i \\ 0 & O\cdot W\end{cases} \quad for \quad i=1,2,..,n \quad \cdots\cdots(15)$$

$$\mu_i=\frac{a_i+b_i}{2} \qquad ,\sigma_i^2=\frac{(b_i-a_i)^2}{12} \qquad , \; F_i(r_i)=\frac{r_i-a_i}{b_i-a_i}$$

$$R_i(r_i)=1-F_i(r_i)$$
$$=\frac{b_i-r_i}{b_i-a_i} \quad \cdots\cdots(16)$$

وبتعويض المعادلة (15) في المعادلة (5) نحصل على:

$$\overline{S_i}(r_i)=\int_{r_i}^{\infty}(x-r_i)\quad f_i(x;a_i,b_i)\quad dx$$
$$=\int_{r_i}^{b_i}x\quad f_i(x;a_i,b_i)\quad dx-r_i\int_{r_i}^{b_i}f_i(x;a_i,b_i)\quad dx$$
$$=\frac{(b_i-r_i)^2}{2(b_i-a_i)} \quad i=1,2,...,n \quad \cdots\cdots(17)$$

وبتعويض المعادلتين (17) , (16) في (10) , (12) على التوالي نحصل على:

$$(1+\beta)(1+\lambda)h_iQ_i^{2+\beta}-2D_iK_i+2h_i\beta(1+\lambda)(r_i-\mu_i)Q_i^{1+\beta}-2P_iD_i\left[\frac{(b_i-r_i)^2}{2(b_i-a_i)}\right]=0 \quad i=1,2,...,n \quad \cdots(18)$$

$$\frac{b_i-r_i}{b_i-a_i}=\frac{h_i(1+\lambda)Q_i^{1+\beta}}{P_iD_i}, \quad i=1,2,...,n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

وبحل المعادلتين (18) و (19) باستخدام الخوارزمية المقترحة الثانية فإننا سوف نحصل على قيم Q_i^*, r_i^*, λ^* المثلى.

2. الطلب يتبع التوزيع الطبيعي

Demand Follows Normal Distribution

افترض أن الطلب (x) أثناء فترة التوريد متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع الطبيعي بمعدل μ_i وتباين σ_i^2 وبدالة كثافة احتمالية:

$$f_i(x;\mu_i,\sigma_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}\quad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} & -\infty<x<\infty \\ 0 & O.W\end{cases} \quad for \quad i=1,...,n \quad \cdots(20)$$

وبالاستفادة من العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي القياسي نحصل على:

$$
\begin{aligned}
f_i(x;\mu_i,\sigma_i) &= \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sigma_i} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sigma_i} \quad \phi(z), \quad i=1,2,\ldots,n \quad \cdots\cdots(21)
\end{aligned}
$$

إذ إن:

$$
R(z) = 1-\Phi(z) \quad \cdots\cdots(22)
$$

بتعويض المعادلة (21) في المعادلة (5) نحصل على:

$$
\overline{S_i}(r_i) = \int_{r_i}^{\infty} (x-r_i) \quad f_i(x;\mu_i,\sigma_i) \quad dx
$$

$$
\begin{aligned}
z = \frac{x-\mu_i}{\sigma_i} \quad &\Rightarrow \quad z\sigma_i = x-\mu_i \\
& x = z\sigma_i + \mu_i \\
& dx = \sigma_i \quad dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{S_i}(r_i) &= \int_{\frac{r_i-\mu_i}{\sigma_i}}^{\infty} \frac{(z\sigma_i+\mu_i)}{\sigma_i} \quad \phi(z) \quad \sigma_i dz \quad - \quad r_i \int_{\frac{r_i-\mu_i}{\sigma_i}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_i} \quad \phi(z) \quad \sigma_i dz \\
&= \sigma_i \quad \phi\left(\frac{r_i-\mu_i}{\sigma_i}\right) \quad + \quad (\mu_i - r_i) \quad R\left(\frac{r_i-\mu_i}{\sigma_i}\right), \quad \cdots\cdots(23)
\end{aligned}
$$

وبتعويض المعادلتين (23) ، (22) في (10) ، (12) على التوالي نحصل على:

$$
(1+\beta)(1+\lambda)h_i Q_i^{2+\beta} - 2D_i K_i + 2h_i\beta(1+\lambda)(r_i-\mu_i)Q_i^{1+\beta} - 2P_i D_i\left[\sigma_i\phi\left(\frac{r_i-\mu_i}{\sigma_i}\right) \quad + \quad (\mu_i-r_i) \quad R\left(\frac{r_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)\right] = 0 \quad i=1,2,..,n \quad \cdots(24)
$$

$$
1-\Phi\left(\frac{r_i-\mu_i}{\sigma_i}\right) = \frac{h_i(1+\lambda)Q_i^{1+\beta}}{P_i D_i}, \quad i=1,2,\ldots,n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)
$$

وبحل المعادلتين (24) و (25) باستخدام الخوارزمية المقترحة الثانية فإننـا سـوف نحصل على قيم Q_i^* ,r_i^* ,λ^* المثلى.

8- حالات خاصة   Special Cases

يمكن استنتاج بعض نماذج الخزين بوصفها حالات خاصة من النموذج قيد الدراسـة التي تكونان على النحو الآتي:

الحالة (1):

إذا كانت $i=1$ و $\beta=0 \Rightarrow h(Q)=h$ و $\lambda=0$, $M \to \infty$ فإننا سوف نحصل على نموذج خزين احتمالي غير مقيد لعنصر وحيد (Single Item) كلفة الاحتفاظ بالخزين فيه تكون ثابتة. فإذا كان الطلب أثناء فترة التوريد متغيراً عشوائياً مستمراً يتبع التوزيع المنتظم فإن المعادلتين (18)،(19) تكونان على النحو الآتي:

$$Q=\sqrt{\frac{2D\left(K + P\bar{S}(r)\right)}{h}} \quad \cdots\cdots(26)$$

إذ إن:

$$\bar{S}(r)=\frac{(b-r)^2}{2(b-a)}$$

$$R(r)=\frac{hQ}{PD} \quad \cdots\cdots(27)$$

إذ إن:

$$R(r)=\frac{b-r}{b-a}$$

وهذا هو نموذج خزين .Taha H.

أما إذا كان الطلب أثناء فترة التوريد متغيراً عشوائياً مستمراً يتبع التوزيع الطبيعي فإن المعادلتين (24)،(25) تكونان على النحو الآتي:

$$Q=\sqrt{\frac{2D\left(K + P\bar{S}(r)\right)}{h}} \quad \cdots\cdots(28)$$

إذ إن:

$$\bar{S}(r)=\sigma\phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) + (\mu-r)R\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)$$

$$R(r)=\frac{hQ}{PD} \quad \cdots\cdots(29)$$

إذ إن:

$$R(r)=1-\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)$$

وهذا هو نموذج خزين Hadley and Whitin .

الحالة (2):

إذا كانت $\beta = 0 \Rightarrow h(Q) = h$ فإننا سوف نحصل على نموذج خـزين احتمـالي مقيد متعدد العناصر (Multi Item) كلفة الاحتفاظ بالخزين فيه تكون ثابتة، فإذا كان الطلـب أثناء فترة التوريد متغيراً عشوائياً مستمراً يتبع التوزيع المنتظم فـإن المعـادلتين (18)،(19) تكونان على النحو الآتي:

$$(1+\lambda)h_i Q_i^2 - 2D_i K_i - 2P_i D_i \overline{S}(r) = 0 \quad , \quad i = 1,2,...,n \quad \cdots(30)$$

إذ إن:

$$\overline{S_i}(r_i) = \frac{(b_i - r_i)^2}{2(b_i - a_i)} \quad , \quad i = 1,2,...,n$$

$$R_i(r_i) = \frac{h_i(1+\lambda)Q_i}{P_i D_i}, \quad i = 1,2,...,n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

إذ إن :

$$R_i(r_i) = \frac{b_i - r_i}{b_i - a_i} \quad , \quad i = 1,2,...,n$$

أما إذا كان الطلب أثناء فترة التوريد متغيراً عشوائياً مستمراً يتبع التوزيـع الطبيعـي فإن المعادلتين (24)،(25) تكونان على النحو الآتي:

$$(1+\lambda)h_i Q_i^2 - 2D_i K_i - 2P_i D_i \overline{S_i}(r_i) = 0 \quad i = 1,2,..,n \quad \cdots(32)$$

إذ إن:

$$\overline{S_i}(r_i) = \left[\sigma_i \phi\left(\frac{r_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) + (\mu_i - r_i) \quad R\left(\frac{r_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right] \quad , \quad i = 1,2,...,n$$

$$R_i(r_i) = \frac{h_i(1+\lambda)Q_i}{P_i D_i}, \quad i = 1,2,...,n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

إذ إن:

$$R_i(r_i) = 1 - \Phi\left(\frac{r_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \quad , \quad i = 1,2,...,n$$

9- الجانب التطبيقي:

يعد مكتب نون العلمي لدعاية الأدوية من المكاتب المتخصـصة باسـتيراد الأدويـة والمواد الطبية من الشركات الأجنبية ذوات المناشئ العالمية وتوزيعها التـي تكـون مـسجلة ومفحوصة في وزارة الصحة العراقية. علماً أن الأدوية التي تم إجراء البحث عليها هي مـن منتجات شركة فارما 5 المغربية. ولغرض تطبيق نموذج الخزين الاحتمالي تم الاعتماد علـى بيانات الطلب لدواء داء السكر (ميتفورمين 500 ملغ وميتفورمين 850 ملـغ) لعـام 2010-2011 , إذ حدد القيد المفروض على كلفة الاحتفاظ بالخزين أثناء السنة بمقـدار 360 دولاراً

للمادتين. علماً أن الفترة الزمنية المستغرقة منذ تحديد أذن الطلبية لغاية وصول الطلبية تقـدر بشهرين تقريباً.

وقبل البدء بتطبيق نموذج الخزين الاحتمالي وإيجاد القـيم المثاليـة لحجـم الطلبيـة ومستوى الخزين الملائم (نقطة إعادة الطلبية) لابد من تحليل بيانات الطلب على الدواء أثنـاء فترة التوريد (المقدرة بشهرين تقريباً) لمعرفة التوزيع الاحتمالي الذي تتبعه. وقـد لـوحظ ان الطلب على المادتين (ميتفورمين 500 ملغ وميتفورمين 850 ملغ) يتبـع التوزيـع الطبيعـي بمعدل 423 وتباين 1327 للمادة الأولى. ومعدل 426 وتباين 1231 للمادة الثانية.

1. تنفيذ الخوارزمية المقترحة الأولى لاختبار القيد ومناقشة النتائج:

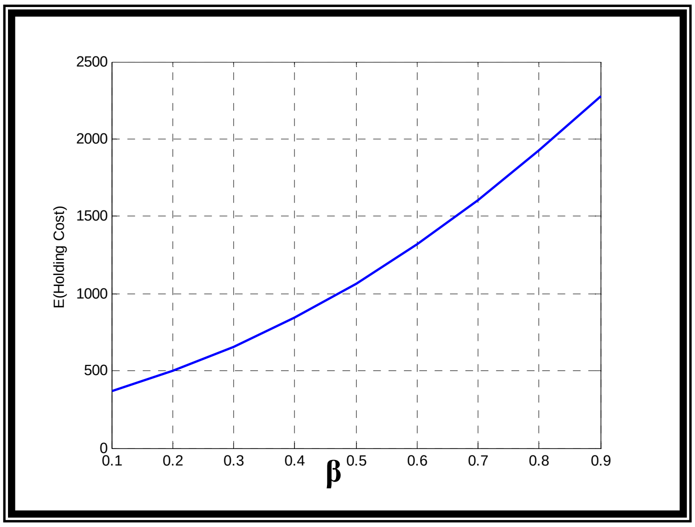
بعد معرفة التوزيع الاحتمالي للطلب على المواد قيد الدراسة تم تطبيـق الخوارزميـة المقترحة الأولى على البيانات لاختبار فعالية القيد وذلك ببرمجة خطوات هـذه الخوارزميـة باستخدام البرنامج الجاهز Matlab , والجدول (1) يوضح نتائج تنفيذ هذه الخوارزمية.

الجدول (1)

يوضح نتائج تنفيذ الخوارزمية المقترحة الأولى لاختبار القيد

β	Q_1^*	r_1^*	Q_2^*	r_2^*	E(Holding Cost)
0.1	628.3889	494.4572	618.8324	495.2410	370.8667
0.2	447.1880	490.7791	440.7586	491.6679	498.2148
0.3	327.7297	487.4453	323.2755	488.4315	654.2115
0.4	246.2822	484.4524	243.1692	485.5014	841.4297
0.5	189.1395	481.7796	186.8999	482.9059	1061.7
0.6	148.0019	479.4404	146.3958	480.6115	1315.9
0.7	117.7601	477.4091	116.5969	478.6207	1604.3
0.8	95.0720	475.6970	94.2228	476.9391	1925.8
0.9	77.7464	474.3064	77.1388	475.5566	2278.6

من الجدول (1) نلاحظ تغير كلفة الاحتفاظ بالخزين المتغيرة مـع قـيم β إذ تكـون العلاقة بينهما علاقة طردية أي بزيادة قيمة β فإن كلفة الاحتفاظ بالخزين المتغيرة تزداد أيضاً ويمكن توضيح هذه العلاقة بالشكل (2). أيضاً نلاحظ بأن كلفة الاحتفاظ بـالخزين المتغيـرة ولجميع قيم β تكون اكبر من قيمة الحد الأقصى المسموح به لهذه الكلفة وهو M=360 وبذلك فإن القيد يكون فعالاً.



الشكل (2) يوضح العلاقة بين كلفة الاحتفاظ بالخزين المتغيرة مع قيم β

2. تنفيذ الخوارزمية المقترحة الثانية لحل النموذج المقيد ومناقشة النتائج:

بعد تطبيق الخوارزمية المقترحة الأولى لاختبار القيد على البيانات والتأكد من فعاليـة القيد تم تطبيق الخوارزمية المقترحة الثانية لحل النموذج المقيد لإيجاد القـيم المثاليـة لحجـم الطلبية ومستوى الخزين الملائم (نقطة إعادة الطلبية) و الكلفة الكلية الصغرى. وذلك ببرمجة خطوات هذه الخوارزمية باستخدام البرنامج الجاهز Matlab. والجدول (2) يوضـح نتـائج تطبيق هذه الخوارزمية.

الجدول (2)

يوضح نتائج تنفيذ الخوارزمية المقترحة الثانية لحل النموذج المقيد

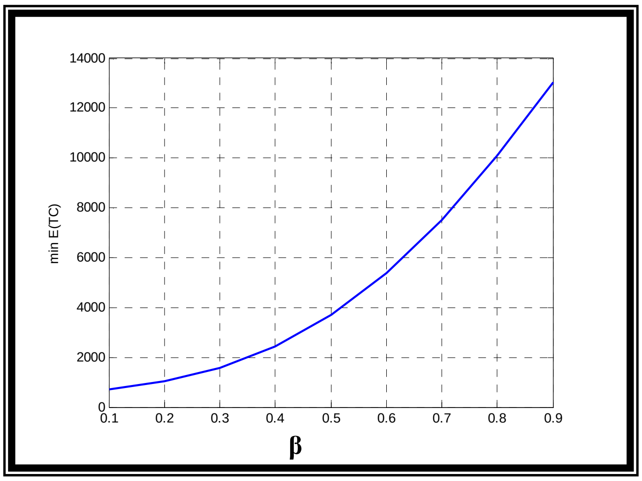
λ^*	Q_1^*	r_1^*	$S(r_1^*)$	Q_2^*	r_2^*	$S(r_2^*)$	E(Set Up Cost)	E(Holding Cost)	E(Shortage Cost)	Min E(TC)
0.0686	609.1500	493.9530	0.3308	599.8345	494.7643	0.3263	337.1055	359.9909	13.8424	710.9
1.0444	324.4220	485.3911	0.6074	319.7391	486.4215	0.5996	632.6865	359.9965	47.7279	1040.4
2.6513	188.1329	477.4716	1.0236	185.6037	478.6952	1.0131	1090.5	359.9994	138.8021	1589.3
5.0484	117.8959	470.2487	1.5964	116.4356	471.6472	1.5796	1739.2	359.9991	345.2126	2444.4
8.2747	79.4307	463.6614	2.3298	78.6083	465.1759	2.3113	2578.7	359.9990	747.9785	3686.7
12.1788	57.3743	457.4694	3.2500	56.8747	459.0837	3.2333	3567.1	359.9997	1445.4	5372.4
16.3474	44.3279	451.3717	4.4191	44.0181	453.0607	4.4106	4612.9	359.9995	2545.6	7518.5
19.9147	37.7616	443.5330	6.3714	37.6634	445.1526	6.4266	5403	359.9990	4321.8	10085
22.4683	31.4379	439.4670	7.6053	31.2556	441.3402	7.6128	6500.3	357.5606	6182.7	13041

β	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

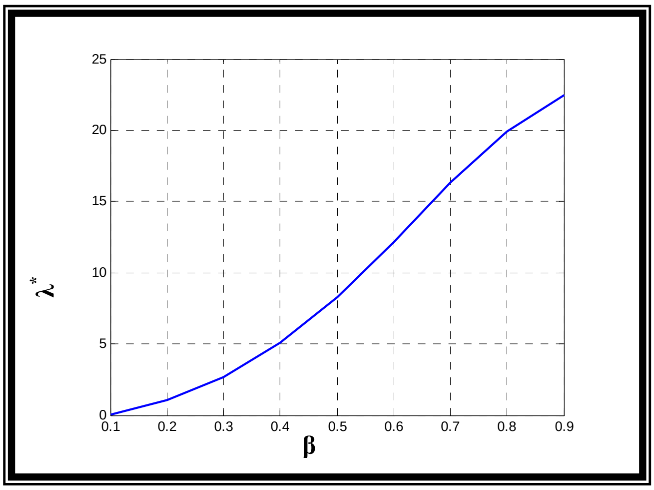
من الجدول (2) وبمقارنة نتائج القيد (كلفة الاحتفاظ بالخزين المتغيرة) مع نتائج القيـد المبينة في الجدول (1) نلاحظ أنه تمت السيطرة على القيد ضمن المدى المحدد.

نلاحظ أيضاً أن هناك علاقة طردية بين قيم β والكلفة الكلية الصغرى min E(TC) وهذه العلاقة يمكن توضيحها بالشكل (3), كذلك نلاحظ أن هناك علاقة طردية بين قيم β وقيم مضاعفات لاكرانج λ^* ويمكن توضيح هذه العلاقة بالشكل (4).

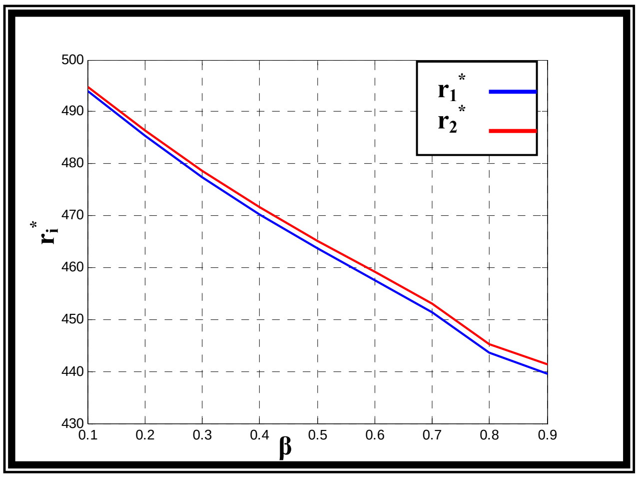
كما أن هناك علاقة عكسية بين قيم β ومستوى الخزين الملائـم r_i^* (نقطـة إعـادة الطلبية) وهذه العلاقة موضحة بالشكل (5), و العلاقة بين قيم β وحجم الطلبية المثـالي Q_i^* هي علاقة عكسية وهي موضحة بالشكل (6). أيضاً نلاحظ أن أقل كلفة كلية تـم الحـصول عليها مقابل أصغر قيمة لـ β.

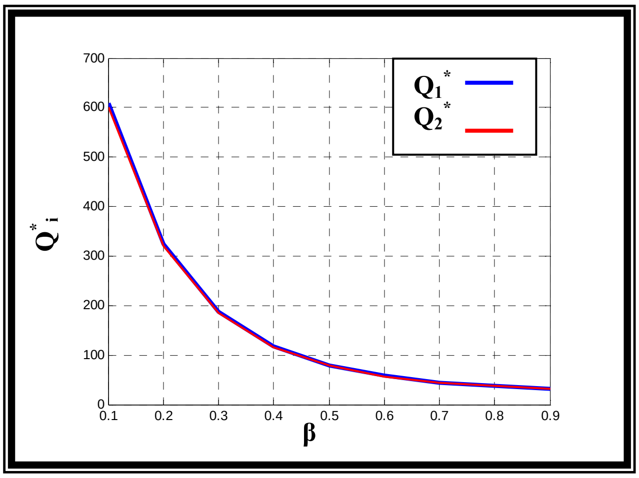


الشكل (3) يوضح العلاقة بين قيم β والكلفة الكلية الصغرى min E(TC)



الشكل (4) يوضح العلاقة بين قيم β وقيم مضاعفات لاكرانج λ^*





الشكل (5) يوضح العلاقة بين قيم β ومستوى الخزين للمادتين

الشكل (6) يوضح العلاقة بين قيم β وحجم الطلبية المثالي للمادتين

10- الاستنتاجات:

من خلال دراستنا لنماذج الخزين الاحتمالية والنتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث نستنتج ما يأتي:

1- من الحالات الخاصة المدروسة نستنتج أن نموذج الخزين الاحتمالي قيد الدراسة أكثر شمولاً من نماذج الخزين الكلاسيكية, و يمكن توضيح هذه الحالات بالجدول الآتي:

ت	عدد i	قيم β	قيمة λ	التوزيع الاحتمالي للطلب	نموذج الخزين المستنتج
1	1	0	0	التوزيع المنتظم	نموذج خزين احتمالي لعنصر وحيد غير مقيد بكلف ثابتة وهذا هو نموذج خزين Taha H. .
2	1	0	0	التوزيع الطبيعي	نموذج خزين احتمالي لعنصر وحيد غير مقيد بكلف ثابتة وهذا هو نموذج خزين Hadley and Whitin.
3	>1	0	>0	التوزيع المنتظم	نموذج خزين احتمالي متعدد العناصر مقيد بكلف ثابتة
4	>1	0	>0	التوزيع الطبيعي	نموذج خزين احتمالي متعدد العناصر مقيد بكلف ثابتة

إذ يمكن حل هذه الحالات الخاصة جميعها باستخدام الخوارزميتين المقترحتين.

2- أظهرت الخوارزمية المقترحة الأولى لاختبار القيد كفاءتها في اختبار القيد من حيث فعاليته, إذ بينت نتائج تنفيذ هذه الخوارزمية والموضحة في الجدول (1) فعالية القيد إذ كانت قيمة القيد لجميع قيم β أكبر من الحد الأقصى المسموح به.

3- أظهرت الخوارزمية المقترحة الثانية لحل النموذج المقيد كفاءتها في التوصل إلى القيم المثالية, فمن خلال ملاحظة نتائج تنفيذ هذه الخوارزمية والموضحة في الجدول (2) تبين أن أقل كلفة كلية حُصِل عليها مقابل أصغر قيمة لـ β. أيضاً نلاحظ أنه تم السيطرة على القيد ضمن المدى المحدد.

4- من ملاحظة القيم المثالية التي تم التوصل إليها والموضحة في الجدول (2) نستنتج ما يأتي:

أ. أن هناك علاقة طردية بين قيم β والكلفة الكلية الصغرى min E(TC) , وكذلك توجد علاقة طردية بين قيم β وقيم مضاعفات لاكرانج λ^*.

ب. أن هناك علاقة عكسية بين قيم β ومستوى الخزين المثالي (نقطة إعادة الطلبية) r^*_i , والعلاقة بين قيم β وحجم الطلبية المثالي Q^*_i هي علاقة عكسية أيضاً.

المصـادر References

1. **جزاع, عبد ذياب, (1986). "*بحوث العمليات*" الطبعة الثانية, جامعة بغداد, وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.**
2. **حمدان, فتحي خليل, (2010). "*بحوث العمليات مع تطبيقـات باسـتخدام الحاسـوب*", الطبعـة الأولى, دار وائل للنشر, عمان, الأردن.**
3. **الخياط, باسل يونس ذنون, (1991). "*الاحتمالية والمتغيرات العشوائية*", دار الكتـب والنـشر-الموصل, جامعة الموصل.**

4. Ben-Daya M., & Hariga M., (2004). *"Integrated Single Vendor Single Buyer Model with Stochastic Demand and Variable Lead Time"*, International Journal of Production Economics, 92, PP. 75-80.

5. Fergany H.A., (2005). *"Periodic Review Probabilistic Multi-Item Inventory System with Zero Lead Time under Constraints and Varying Order Cost"*, American Journal of Applied Sciences, vol. 2, No. 8, PP. 1213-1217.

6. Fergany H.A., & El-Wakeel M.F., (2006). *"Constrained Probabilistic Lost Sales Inventory System with Normal Distribution and Varying Order Cost"*, Journal of Mathematics and Statistics, Vol. 2, No. 1, PP. 363-366.

7. Hadley G. & Whitin T.M., (1963). *"Analysis of Inventory Systems"*, N.J. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

8. Kopytov E., & Greenglaz L., (2007). *"Modelling of Two Strategies in Inventory Control System with Random Lead Time and Demand"*, Computer Modelling and New Technologies, Vol. 11, No. 1, PP. 21-30.

9. Lo M., (2009). *"Economic Ordering Quantity Model with Lead Time Reduction and Backorder Price Discount for Stochastic Demand"*, American Journal of Applied Sciences, Vol. 6, No. 3, PP. 387-392.

10. . Richards F.R., (1975). *"Comments on the Distribution of Inventory Position in a Continuous-Review (s,S) Inventory System"*, Institute for Operations Research and the Management Sciences, Vol. 23, No. 2, PP. 366-371.

11. Taha H.A., (1992). *"Operations Research An Introduction"*, Macmillan Publishing, a division of Macmillan, Inc., USA., 5th ed.

12. Winston W.L., (1994). *"Operations Research Applications and Algorithms"*, Wads Worth , Inc., USA.