

تكوين لوحة χ^2 باستخدام أسلوب بيز مع التطبيق

أحمد ممتاز خليل *

د. ريا سالم الرسام *

المستخلص :

تم في هذا البحث تكوين لوحة جديدة متعددة المتغيرات باستخدام أسلوب بيز وأطلق على هذه اللوحة الجديدة أسم لوحة χ^2 لبيز متعددة المتغيرات (χ_B^2) ، للسيطرة على معدل نوعية المادة المنتجة .

طبقت لوحة السيطرة (χ_B^2) على بيانات حقيقية شملت نتائج الفحص لنماذج الخرسانة الإسفلتية للطبقة الأساس المستخدمة في إنشاء الشوارع الحديثة والتي تم الحصول عليها من الهيئة العامة للطرق والجسور/المديرية العامة للطرق والجسور في محافظة نينوى .

Constructing χ^2 Chart by Using Bayesian Approach with Application

Dr. Raya Salim. Al Rassam

Ahmed Mumtaz Khalil

Summary :

In this study, new charts were formed using Bayesian technique and they were called Bayesian chart (χ_B^2) , to control the average . The control chart (χ_B^2) was used and the process includes real data that involved results of test of the asphalt concrete samples of the base layer used in the construction of new streets. These samples were obtained from the general authority of roads and bridges / The general directorate of roads and bridges in Nineveh province .

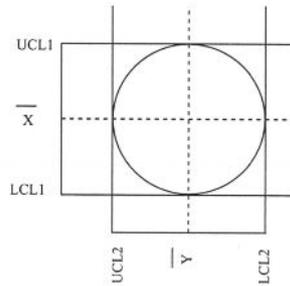
1: المقدمة :

إن السيطرة الإحصائية على النوعية هي أحد الفروع المهمة في الإحصاء التي شاع استخدامها في مجالات العملية الإنتاجية خاصةً بعد التطور الذي شهدته تلك المجالات واستخدام التقنيات التكنولوجية الحديثة في الإنتاج وزيادة الطلب على منتجات مختلفة وبمواصفات عالية الجودة ضمن إطار الموارد المحدودة فظهرت المنافسة بين الشركات الإنتاجية والصناعية من

* أستاذ مساعد/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل.
** ماجستير/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل

حيث جودة المنتج ومطابقته للمواصفات الموضوعه حيث تعمل على تقليل التكاليف العالية التي تُصرف في تصحيح الأخطاء أو اكتشافها في العملية الإنتاجية وذلك عند تطبيق برنامج أو أسلوب إحصائي في السيطرة النوعية مما يؤدي إلى خفض أسعار البيع كما أن استعمال الأسلوب الإحصائي غالباً ما يؤدي إلى زيادة كفاءة السيطرة النوعية قياساً إلى الأساليب الأخرى وهذا يؤدي إلى خفض نسب التالف وقلّة توقف المكين ، وعند فحص خاصية نوعية محددة لمنتج ما فإن الفحص بنسبة 100% يتلف جميع ما تم إنتاجه من ذلك المنتج ، أما عند استخدام أساليب السيطرة النوعية الإحصائية وفي مقدمتها لوحات السيطرة فإن أعداداً قليلة من المنتج يتم فحصها فقط للحكم على نوعيته .

إن لوحات السيطرة ذات المتغير الواحد تطورت لتشمل عدة متغيرات على يد الباحث (Hotelling) عام 1947 في كتابه المعروف (Multivariate quality control) والذي أسترخص فيه الأساليب الإحصائية المستخدمة في السيطرة النوعية للحالات التي تشتمل على أكثر من متغير واحد واستخدم في ذلك نظرية التوزيعات متعددة المتغيرات ويُعتبر هذا الكتاب الأساس والمرجع الأول لمعظم البحوث والدراسات المنشورة بخصوص هذا الموضوع إذ قام الباحث (Hotelling) بتكوين لوحتي السيطرة χ^2 ، T^2 المتعددة المتغيرات بالاعتماد على لوحات شيوارت ذات المتغير الواحد لذا أُطلقَ على هاتين اللوحتين أسم لوحات شيوارت متعددة المتغيرات^{[3][6]} ، وبعد نجاح لوحتي χ^2 ، T^2 قام الباحثان (Ghare and Torgerson) عام 1968 بتقديم لوحة السيطرة ثنائية المتغير (ذات متغيرين) وذلك بالاعتماد على الإحصاءة χ^2 إذ يمكن تطبيق اللوحة بيانياً (على الرسم) وباستخدام البعدين (Y,X) وأن المنطقة التي تكون عندها العملية الإنتاجية تحت السيطرة هي منطقة دائرية وكما موضح في الشكل أدناه :



الشكل (1) يوضح كيفية تطبيق لوحة السيطرة ذات متغيرين بيانياً

الإحداثيات (Y,X) تتناظر وتتقابل عند القيم المناسبة للإحصاءة χ^2 المرسومة لكل عينة.^{[4][5]} إن التجارب السابقة والخبرة الشخصية ذات أهمية كبيرة تساعد متخذ القرار على اتخاذ قراراً سليم حول المسألة التي يدرسها وعلى هذا الأساس تركز إهتمام البحث بتكوين لوحة سيطرة

جديدة متعددة المتغيرات تستخدم للسيطرة على معدل نوعية المادة المنتجة مستخدمين في ذلك معلومات مسبقة خبرية وغير خبرية حول معدل العملية الإنتاجية .

وإشتمل البحث على كيفية استخدام نظرية بيز في إيجاد مقدرات بيز لمعاملات التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات θ ، Σ التي في ضوئها تم تكوين لوحة السيطرة χ^2 لبيز متعددة المتغيرات ، أما الجانب التطبيقي فقد تضمن تطبيق لوحة χ_B^2 المكونة ، وكذلك تم توضيح سلوك كل من المتغيرات بشكل مستقل من خلال تطبيق لوحة بيز للوسط الحسابي (Bayesian-Xbar) فيما يتعلق بالسيطرة على معدل نوعية المادة المنتجة .

2: هدف البحث :

تكوين لوحة السيطرة (χ_B^2) متعددة المتغيرات باستخدام أسلوب بيز كونه يستخدم جميع المعلومات المتوفرة (السابقة والحالية) في عملية اتخاذ القرار ، وهذه اللوحة تستخدم للسيطرة على معدل نوعية المادة المنتجة .

3: الجانب النظري :

لقد امتدت دراسة لوحات السيطرة لتشمل لوحات السيطرة متعددة المتغيرات وأعطيت الأدلة اللازمة لتصميم مثل هذه اللوحات وبشكل يسهل استخدامه خاصة بعد التطور الحاصل باستخدام الحاسوب ومعدات استبيانات المعلومات الحديثة أثناء الإنتاج إذ أن من أهم محاسن استخدام لوحات السيطرة متعددة المتغيرات هو مراقبة بعض خصائص النوعية في حالة العلاقة بين المتغيرات وتأثيرها في المنتج ، وتعد لوحات السيطرة (χ^2, T^2) من أول لوحات السيطرة متعددة المتغيرات التي تم تقديمها من قبل العالم (Hotelling) عام 1947 ، وقد حققت هاتان اللوحتان نجاحاً وتطبيقاً واسعاً إلا أنه يُعاب عليهما أن أية نقطة في اللوحة ليس لها علاقة ببيانات النقاط السابقة لها وهذه الصفة تجعل اللوحة أقل حساسية في كشف التغيرات المستمرة في مستوى العملية الإنتاجية .

3-1: لوحة شيوارت (χ^2): [1][2]

إن لوحة χ^2 لشيوارت متعددة المتغيرات يمكن توضيحها بحالتين هما :

1- لوحة χ^2 عندما ($n=1$)

لنفرض أن لدينا P من المتغيرات العشوائية التي تتبع التوزيع الطبيعي متعدد

المتغيرات و m من العينات التي تحتوي على المشاهدات المأخوذة لتلك المتغيرات

إذ يتم أخذ مشاهدة واحدة لكل متغير في العينة i أي أن $n=1$ ، فإن n تمثل عدد

المشاهدات في كل عينة لكل متغير فإن المختبر الإحصائي χ^2 يكون وفق الصيغة :

$$\chi_i^2 = (x_i - \theta_0)' \Sigma_0^{-1} (x_i - \theta_0) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \dots(1)$$

وأن :

(χ_i) : تمثل متجه مشاهدات المتغيرات في العينة i ذي البعد $(p \times 1)$.

(θ_0) : تمثل متجه المتوسط المعلوم ذا البعد $(p \times 1)$.

(Σ_0) : تمثل مصفوفة التباين والتباين المشترك المعلوم ذات البعد $(p \times p)$.

وأن قيم χ_i^2 الموضحة في المعادلة (1) يتم رسمها على اللوحة ، إذ أن الإحصاءة χ^2 تتبع توزيع مربع كاي χ^2 بدرجات حرية p ، عليه فإن لوحة السيطرة χ^2 لشيوات متعددة المتغيرات وعندما تكون المعلمات θ_0 ، Σ_0 معلومة سيكون حدها العلوي وفق الصيغة :

$$UCL = \chi_{p,\alpha}^2$$

إذ أن :

($\chi_{p,\alpha}^2$) : قيمة χ^2 الجدولية بالإعتماد على درجات الحرية p ومستوى المعنوية α .

2- لوحة χ^2 عندما $(n > 1)$

لنفرض أن لدينا P من المتغيرات العشوائية التي تتبع التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات و m من العينات التي تحتوي على المشاهدات المأخوذة لتلك المتغيرات إذ يتم أخذ أكثر من مشاهدة واحدة لكل متغير في العينة i أي أن $n > 1$ لكل متغير فإن المختبر الإحصائي χ^2 يكون وفق الصيغة :

$$\chi_i^2 = n(\bar{x}_i - \theta_0)' \Sigma_0^{-1} (\bar{x}_i - \theta_0) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \dots(2)$$

إذ أن :

(\bar{x}_i) : يمثل متجه الوسط الحسابي للعينة i ذي البعد $(p \times 1)$ ويتم حسابه وفق الصيغة :

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_j^n x_j$$

إذ أن :

(θ_0) : تمثل متجه المتوسط المعلوم ذا البعد $(p \times 1)$.

(Σ_0) : تمثل مصفوفة التباين والتباين المشترك المعلوم وذات البعد $(p \times p)$.

والإحصاءة χ^2 تمثل تقريباً المسافة الموزونة لأية نقطة من نقاط الهدف θ_0 وتسمى (Mahalanobis distance) ، فإذا وقعت قيمة المختبر الإحصائي χ^2 المحسوبة في المعادلة (2) فوق حد السيطرة العلوي UCL فإن لوحة السيطرة تُشير إلى أن العملية هي خارج السيطرة ، ولوحات السيطرة بشكل عام تملك حدي السيطرة الحد العلوي UCL والحد السفلي LCL ، ونلاحظ بأنه تم استخدام حد السيطرة العلوي UCL مع المختبر الإحصائي χ^2 وذلك لأن القيم

المتطرفة للإحصاءة χ^2 تمثل النقاط البعيدة جداً عن قيمة الهدف θ_0 بينما تمثل القيم الصغيرة والقيم الصفرية للإحصاءة χ^2 النقاط القريبة من قيمة الهدف θ_0 . [3]

2-3: تقدير بيز لمعلمتي التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات: [1]

سنقوم بإيجاد مقدر بيز لمعلمتي التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات θ ، Σ بالاعتماد على:

1- التوزيع السابق غير الخبري القياسي :

(Standard Non-informative prior distribution)

نفرض أن X_1, X_2, \dots, X_n تمثل عينة عشوائية من متجهات المشاهدات المستقلة والمتماثلة التوزيع $P(d \cdot i \cdot i)$ من المتغيرات التي تتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات $X \sim N_p(\theta, \Sigma)$ ، عندئذٍ فإن دالة الكثافة للبيانات (دالة الترجيح) تكون كالاتي :

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n | \theta, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)' \Sigma^{-1} (X_i - \theta)} \quad \dots(3)$$

وإذا كانت θ ، Σ^{-1} مستقلتين ، عندئذٍ فإن الاحتمال السابق المشترك لـ θ ، Σ^{-1} باستخدام قانون (Jefferys) يكون الآتي: [1]

$$P(\theta, \Sigma^{-1}) \propto \frac{1}{|\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}(p+1)}} \quad \dots(4)$$

إن المعادلة (4) تمثل دالة كثافة الاحتمال المشتركة السابقة لـ θ ، Σ^{-1} ، عندئذٍ فإن نواة دالة الكثافة المشتركة اللاحقة (The joint posterior density kernel) يمكن إيجادها بضرب المعادلتين (3) و (4) ومنها نحصل على :

$$P(\theta, \Sigma^{-1} | X_1, X_2, \dots, X_n) \propto |\Sigma^{-1}|^{-\frac{1}{2}(n-p-1)} e^{-\frac{1}{2}tr[(\Sigma^{-1})(A)]} \quad \dots(5)$$

إذ أن :

$$A = n(\bar{X} - \theta)(\bar{X} - \theta)' + V, \quad V = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})'$$

نجد نواة دالة الكثافة اللاحقة الحدية لـ θ عن طريق تكامل المعادلة (5) بالنسبة إلى Σ^{-1} وتكون كالاتي :

$$P(\theta | X_1, X_2, \dots, X_n) \propto \int_{\Sigma^{-1}} |\Sigma^{-1}|^{-\frac{1}{2}(n-p-1)} e^{-\frac{1}{2}tr[(\Sigma^{-1})(A)]} d\Sigma^{-1}$$

ولحل هذا التكامل سوف يتم إخراج نواة دالة توزيع (Wishart) خارج التكامل ، وعليه تكون دالة التوزيع اللاحق لـ θ كالاتي :

$$P(\theta | X_1, X_2, \dots, X_n) \propto \frac{1}{|A|^{\frac{1}{2}n}} = \frac{1}{|V + n(\theta - \bar{X})(\theta - \bar{X})'|^{\frac{1}{2}n}}$$

$$= \frac{1}{|I_p + nV^{-1}(\theta - \bar{X})(\theta - \bar{X})'|^{1/2^n}} \dots(6)$$

$$= \frac{1}{[1 + n(\theta - \bar{X})'V^{-1}(\theta - \bar{X})]^{1/2^n}}$$

نلاحظ أن المعادلة (6) تمثل نواة توزيع t متعدد المتغيرات الذي يعبر عنه وصفاً بـ :

$$(\theta|X_1, X_2, \dots, X_n) \sim t_p(\bar{X}, V, n)$$

عليه فإن مقدر بيز لـ θ سوف يكون الآتي :

$$\hat{\theta}_B = E(\theta|X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X} \dots(7)$$

ولإيجاد التوزيع اللاحق لـ Σ^{-1} نكمل المعادلة (5) بالنسبة إلى θ كالاتي :

$$P(\Sigma^{-1}|X_1, X_2, \dots, X_n) \propto \int_{\theta} P(\theta, \Sigma^{-1}|X_1, X_2, \dots, X_n) d\theta$$

$$\propto |\Sigma^{-1}|^{-\frac{1}{2}(n-p-1)} e^{-\frac{1}{2}tr[(\Sigma^{-1})(V)]} \int_{\theta} e^{-\frac{n}{2}(\bar{X}-\theta)' \Sigma^{-1}(\bar{X}-\theta)} d\theta$$

بفرض أن $m=n-1$ فإن :

$$P(\Sigma^{-1}|X_1, X_2, \dots, X_n) \propto |\Sigma^{-1}|^{-\frac{1}{2}(m-p-1)} e^{-\frac{1}{2}tr[(\Sigma^{-1})(V)]}$$

وهي تمثل نواة توزيع (Wishart) ويعبر عنها وصفاً بـ :

$$(\Sigma^{-1}|X_1, X_2, \dots, X_n) \sim W_p(m, V^{-1})$$

عليه فإن مقدر بيز لـ Σ^{-1} سوف يكون الآتي :

$$\hat{\Sigma}_B^{-1} = E(\Sigma^{-1}|X_1, X_2, \dots, X_n) = (m)V^{-1}$$

$$= (n-1)V^{-1} \dots(8)$$

لغرض إيجاد دالة الكثافة الإحصائية لـ Σ سيتم الاعتماد على دالة الكثافة الاحتمالية لـ Σ^{-1}

Σ وبإجراء بعض التحويلات والعمليات الجبرية نحصل على :

$$P(\Sigma|X_1, X_2, \dots, X_n) \propto \frac{1}{|\Sigma|^{m/2}} e^{-\frac{1}{2}tr \Sigma^{-1}V}$$

إذ أن $m=n+p$:

وهي تمثل نواة توزيع معكوس ويشارت (Inverse Wishart) بالمعلمتين V ، m ويعبر عنها

وصفاً بـ :

$$(\Sigma|X_1, X_2, \dots, X_n) \sim IW_p(m, V)$$

عليه فإن مقدر بيز لـ Σ سوف يكون الآتي :

$$\hat{\Sigma}_B = E(\Sigma | X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{V}{n-p-2} \quad \dots(9)$$

2- التوزيع السابق الخبري (Informative prior distribution)

نفرض أن X_1, X_2, \dots, X_n تمثل عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة والمتماثلة التوزيع (iid) لـ P من المتغيرات التي تتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات $X \sim N_p(\theta, \Sigma)$ ، عندئذ فإن دالة الكثافة المشتركة للبيانات (دالة الترجيح) تكون كالآتي :

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)' \Sigma^{-1} (X_i - \theta) \right\}} \quad \dots(10)$$

ويكون التوزيع المشترك السابق للمعلمتين θ, Σ^{-1} والذي يأخذ شكل توزيع ويشارت (Normal-Wishart) كالآتي [1]:

$$P(\theta, \Sigma^{-1}) \propto |\Sigma^{-1}|^{(m-p)/2} e^{\left\{ -\frac{1}{2} (\theta-a)' \Sigma^{-1} (\theta-a) + tr \Sigma^{-1} \Sigma_0^{-1} \right\}} \quad \dots(11)$$

إذ أن :

(a) : متجه ذو البعد $(p \times 1)$ ويتم إختيار عناصر المتجه لتكون قريبة من متجه الوسط الحسابي .

(b) : تمثل قيمة أولية تكون قريبة من حجم العينة n .

وبإجراء بعض التحويلات والعمليات الجبرية يكون التوزيع المشترك السابق للمعلمتين θ, Σ كالآتي :

$$P(\theta, \Sigma) \propto |\Sigma^{-1}|^{(m+1)/2} e^{\left\{ -\frac{1}{2} (\theta-a)' \Sigma^{-1} (\theta-a) + tr \Sigma^{-1} \Sigma_0^{-1} \right\}} \quad \dots(12)$$

أما التوزيع اللاحق المشترك للمعلمتين θ, Σ فسيكون كالآتي :

$$P(\theta, \Sigma | X_1, X_2, \dots, X_n) \propto P(X_1, X_2, \dots, X_n | \theta, \Sigma) P(\theta, \Sigma) \\ \propto |\Sigma^{-1}|^{(n+m+1)/2} * \\ e^{-\frac{(n+b)}{2} [(\theta-\theta^*)' \Sigma^{-1} (\theta-\theta^*)]} e^{-\frac{1}{2} tr \Sigma^{-1} [(V + \Sigma_0^{-1}) + \frac{nb}{n+b} (\bar{X}-a)(\bar{X}-a)']} \quad \dots(13)$$

$$\theta^* = \frac{n\bar{X} + ab}{n+b} \quad \text{إذ أن :}$$

ولإيجاد التوزيع اللاحق للمصفوفة Σ سوف نكامل التوزيع اللاحق المشترك لـ θ, Σ المعروف في المعادلة (13) بالنسبة إلى θ كالآتي :

$$P(\Sigma|X_1, X_2, \dots, X_n) \propto \int_{\theta} P(\theta, \Sigma|X_1, X_2, \dots, X_n) d\theta$$

$$\propto |\Sigma^{-1}|^{\frac{(n+m)}{2}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} [(V+\Sigma_0^{-1}) + \frac{nb}{n+b} (\bar{X}-a)(\bar{X}-a)']}]$$

ويمثل نواة توزيع معكوس وشارت (Inverse Wishart) والذي يعبر عنه وصفاً بالصيغة الآتية :

$$(\Sigma|X_1, X_2, \dots, X_n) \sim IW_p[n+m, V+\Sigma_0^{-1} + \frac{nb}{n+b} (\bar{X}-a)(\bar{X}-a)']$$

عليه يكون توقع التوزيع اللاحق للمعلمة Σ بالصيغة الآتية :

$$\hat{\Sigma}_B = \frac{V + \Sigma_0^{-1} + \frac{nb}{n+b} (\bar{X}-a)(\bar{X}-a)'}{(n+m) - 2P - 2}$$

وبما أن $(m=n+p)$:

فإن :

$$\hat{\Sigma}_B = \frac{V + \Sigma_0^{-1} + \frac{nb}{n+b} (\bar{X}-a)(\bar{X}-a)'}{2n - P - 2} \quad \dots(14)$$

ومن العلاقة الموجودة بين توزيع (Wishart) وتوزيع (Inverse Wishart) نحصل على :

$$\hat{\Sigma}_B^{-1} \sim W_p[n+m, [V + \Sigma_0^{-1} + \frac{nb}{n+b} (\bar{X}-a)(\bar{X}-a)']^{-1}]$$

وعليه يكون توقع التوزيع اللاحق للمعلمة Σ^{-1} بالصيغة الآتية :

$$\hat{\Sigma}_B^{-1} = (2n+p) [V + \Sigma_0^{-1} + \frac{nb}{n+b} (\bar{X}-a)(\bar{X}-a)']^{-1} \quad \dots(15)$$

ولإيجاد التوزيع اللاحق لمتجه المعلمة θ سوف نكامل التوزيع اللاحق المشترك لـ θ ، Σ المعرف في المعادلة (13) بالنسبة إلى Σ كالآتي :

$$P(\theta|X_1, X_2, \dots, X_n) \propto \int_{\Sigma} P(\theta, \Sigma|X_1, X_2, \dots, X_n) d\Sigma$$

$$\propto \left| 1 + (n+b)(\theta - \theta^*)' [V + \Sigma_0^{-1} + \frac{nb}{n+b} (\bar{X}-a)(\bar{X}-a)']^{-1} (\theta - \theta^*) \right|^{-\frac{(n+m+p+3)}{2}}$$

وهو يمثل نواة توزيع t متعدد المتغيرات ويعبر عنه وصفاً كالآتي :

$$\theta \sim t_p[\theta^*, \frac{V + \Sigma_0^{-1} + \frac{nb}{n+b}(\bar{X} - a)(\bar{X} - a)'}{(2n+2p+3)(n+b)}]$$

$$\hat{\theta}_B = \theta^* \Rightarrow \hat{\theta}_B = \frac{n\bar{X} + ab}{n+b} \quad \dots(16)$$

ويمكن تلخيص مقدرات بيز لمتجه المتوسط θ ومصفوفة التباين Σ للتوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات التي حصلنا عليها باستخدام الاحتمال السابق غير الخبري (Non-Informative) (Prior) والاحتمال السابق الخبري (Informative Prior) بالجدول الآتي :

الجدول (1)

يوضح مقدرات بيز لمتجه معلمات المتوسط θ ومصفوفة التباين Σ للتوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات

مقدرات بيز ذو المعلومات (Informative Prior)	مقدرات بيز ذو المعلومات القليلة (Non-informative Prior)
$\hat{\theta}_B = \frac{n\bar{X} + ab}{n+b}$	$\hat{\theta}_B = \bar{X}$
$\hat{\Sigma}_B^{-1} = (2n+p)[V + \Sigma_0^{-1} + \frac{nb}{n+b}(\bar{X} - a)(\bar{X} - a)']^{-1}$	$\hat{\Sigma}_B^{-1} = (n-1)V^{-1}$
$\hat{\Sigma}_B = \frac{V + \Sigma_0^{-1} + \frac{nb}{n+b}(\bar{X} - a)(\bar{X} - a)'}{2n - P - 2}$	$\hat{\Sigma}_B = V / (n - p - 2)$

أما لوحتا (χ_B^2) الجديدتان اللتان التي تم تكوينهما باستخدام أسلوب بيز فهما كالآتي :

1- لوحة χ_B^2 عندما (n=1)

$$\chi_{B_i}^2 = (x_i - \hat{\theta}_B)' \hat{\Sigma}_B^{-1} (x_i - \hat{\theta}_B) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \dots(17)$$

2- لوحة χ_B^2 عندما (n>1)

$$\chi_{B_i}^2 = n(\bar{x}_i - \hat{\theta}_B)' \hat{\Sigma}_B^{-1} (\bar{x}_i - \hat{\theta}_B) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \dots(18)$$

4: الجانب التطبيقي :

4-1: وصف البيانات :

لا بُد من توضيح البيانات التي سنعتمد عليها عند تطبيق لوحة χ^2 ، وهي تمثل البيانات التي تم الحصول عليها من الهيئة العامة للطرق والجسور (مديرية الطرق والجسور في محافظة نينوى) للمشاريع التي شملت إنشاء شوارع جديدة (علماً أن هذه المديرية مسؤولة عن إنشاء الشوارع وتبليطها خارج مدينة الموصل (الطرق الخارجية التابعة لمحافظة نينوى) للمدة من (5/3/2007) ولغاية (1/9/2010) وأن هذه البيانات تمثل نتائج الفحص لنماذج الخرسانة

الإسفلتية (المستخدمة للطبقة الأساس) التي تم أخذها من الشوارع حديثة الإنشاء لمعرفة فيما إذا كانت هذه الشوارع صالحة للاستخدام وبحالة جيدة أي أن مادة الخرسانة الإسفلتية خاضعة للسيطرة وفق حدود سيطرة معينة ولا يوجد انحراف في متوسط العملية الإنتاجية لهذه المادة ، وكما هو معلوم لدى المختصين في مجال إنشاء الشوارع وتبليطها أن هناك ثلاث طبقات تستخدم معها مادة الخرسانة الإسفلتية في هذا المجال وهي :

الطبقة الأساس : تستخدم مادة الخرسانة الإسفلتية في هذه الطبقة لإنشاء الشوارع الجديدة التي لم تكن موجودة مسبقاً ، ومن الممكن أن تأتي فوقها الطبقتان الرابطة والسطحية .

الطبقة الرابطة : تستخدم مادة الخرسانة الإسفلتية في هذه الطبقة لصيانة وتطوير الشوارع الموجودة مسبقاً من الحفر والمطبات التي تظهر فيها ، ومن الممكن أن تأتي فوقها الطبقة السطحية .

الطبقة السطحية : تستخدم مادة الخرسانة الإسفلتية مع هذه الطبقة لإكساء الشوارع الموجودة مسبقاً والحصول على شوارع جيدة وبدرجة عالية من النعومة مما يسهل حركة المركبات بسهولة وسلاسة أكثر .

أسلوب الفحص لنماذج الخرسانة الإسفلتية يختلف بناء على الطبقة التي تستخدم فيها ، ولضيق الوقت وصعوبة الحصول على البيانات فقد اقتصرنا على نتائج الفحص لنماذج الخرسانة الإسفلتية المستخدمة مع الطبقة الأساس بعَدِها الطبقة الأكثر أهمية في مجال إنشاء وتبليط الشوارع فهي الطبقة الأساسية التي يتم الاعتماد عليها في إنشاء الشوارع الجديدة، أسلوب الفحص لنماذج الخرسانة الإسفلتية الخاصة بهذه الطبقة يتم عن طريق إدخال المادة إلى عدة اختبارات تبدأ بمجموعة من الغرابيل ذات أحجام مختلفة في مقدمتها الغريال (1.5) وتنتهي بالغريال (رقم 200) وكل غريال من تلك الغرابيل له حدود لمعادلة المزج التي تم تطبيقها وهذه تعتمد على نوع المواد التي تم استخدامها في عملية المزج وحدود المواصفة العراقية المثبتة مسبقاً من قبل الهيئة العامة للطرق والجسور، إذ أن نسبة المادة الخارجة من كل غريال يجب أن تكون واقعة ضمن حدود المواصفة ويفضل أن تكون واقعة ضمن حدود المعادلة (معادلة المزج) لتكون المادة صالحة للاستخدام، يلي ذلك فحص نسبة الإسفلت المستخدم وهذه النسبة أيضاً لها حدود لمعادلة المزج وحدود المواصفة وكذلك يجب أن تكون واقعة ضمن حدود المواصفة ويفضل أن تكون واقعة ضمن حدود المعادلة أيضاً، ثم بعد ذلك يتم فحص قوة الثبات للنموذج وزحف النموذج وكثافة النموذج ونسبة الفراغات الهوائية للنموذج ، وجميع هذه الاختبارات لها حدود المواصفة العراقية فقط أي يجب أن تكون نسبة المادة لكل اختبار واقعة ضمن هذه الحدود لتكون صالحة للاستخدام ، (أنظر الملحق D) ، وبمعنى آخر سنقوم بعَدِ الاختبارات المستخدمة في

عملية الفحص مجموعة من المتغيرات العشوائية ونسبة المادة الناتجة من كل اختبار هي مشاهدة لذلك المتغير العشوائي واستخدام لوحات السيطرة للنظر فيما إذا كانت مادة الخرسانة الإسفلتية صالحة للاستخدام وخاضعة للسيطرة وفق حدود معينة تستخدم مع تلك اللوحات . ومن ثم يصبح لدينا متغيرات الدراسة الموضحة في الجدول (2) كالآتي :

الجدول (2)

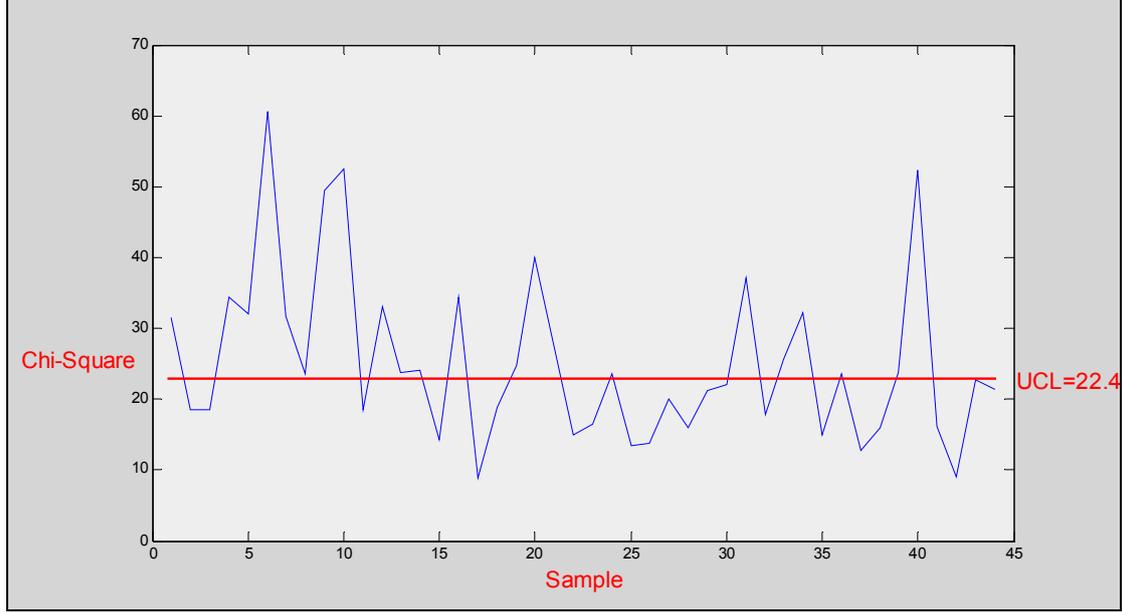
يوضح المتغيرات التي تناولتها الدراسة

حدود المواصفة العراقية المتبعة	المتغيرات تحت الدراسة
100-90	1- الغريال
90-76	2- الغريال 3/4
80-56	3- الغريال 1/2
74-48	4- الغريال 3/8
59-29	5- الغريال رقم 4
45-19	6- الغريال رقم 8
17-5	7- الغريال رقم 50
8-2	8- الغريال رقم 200
5.5-3	9- نسبة الإسفلت (%Asphalt)
5 حد أدنى	10- قوة ثبات النموذج (Marshal Stability)
4-2	11- زحف النموذج (Flow)
-	12- كثافة النموذج (Density)
6-3	13- نسبة الفراغات الهوائية (Air Voids)

ملاحظة : تم إستثناء الغريال 1.5 لأنه أخذ قيمة واحدة في جميع المشاهدات وذلك يؤثر في مصفوفة التباين والتباين المشترك للمتغيرات .

وكما أشرنا سابقاً الى البيانات تمثل نتائج الفحص لنماذج الخرسانة الإسفلتية للطبقة الأساس التي شملت (44) عينة (العينة تمثل الشارع الجديد الذي تم إنشاؤه) وكل عينة تضم (3) مشاهدات لكل متغير (أي تم أخذ ثلاثة نماذج من الشارع لاختبار المتغيرات أعلاه ومن ثم نحصل على ثلاث قراءات لكل متغير في العينة الواحدة) .

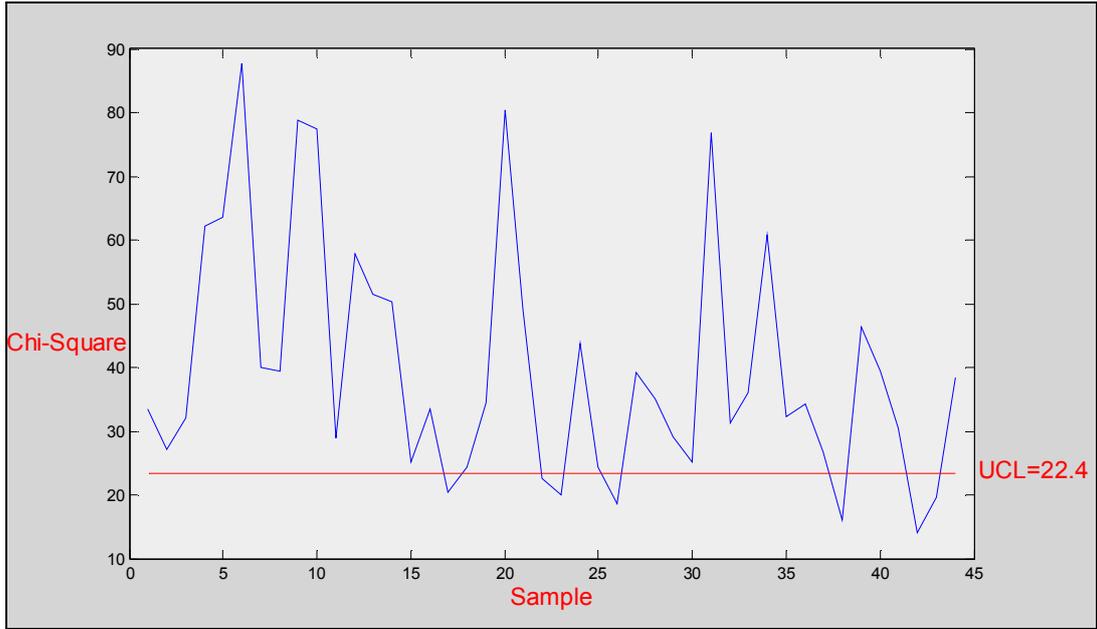
4-2: التطبيق :

1: لوحة χ_B^2 متعددة المتغيرات في حالة (Non-informative prior) :الشكل (2) يوضح لوحة χ_B^2 عندما $(\alpha=0.05)$

تم رسم لوحة χ_B^2 باستخدام برنامج تمت كتابته بلغة (MATLAB) (أنظر الملحق A) وباعتماد على المعادلة (18) ، وكما هو واضح من اللوحة أن العملية الإنتاجية هي خارج السيطرة لوجود قيم للإحصاءة χ^2 تجاوزت حد السيطرة العلوي للوحة وهذا يعني وجود متغير أو أكثر من ضمن المتغيرات خارج السيطرة ، إن قيمة حد السيطرة العلوي للوحة تمثل القيمة الجدولية للإحصاءة χ^2 المعتمدة على عدد المتغيرات ومستوى المعنوية ، إذ أن :

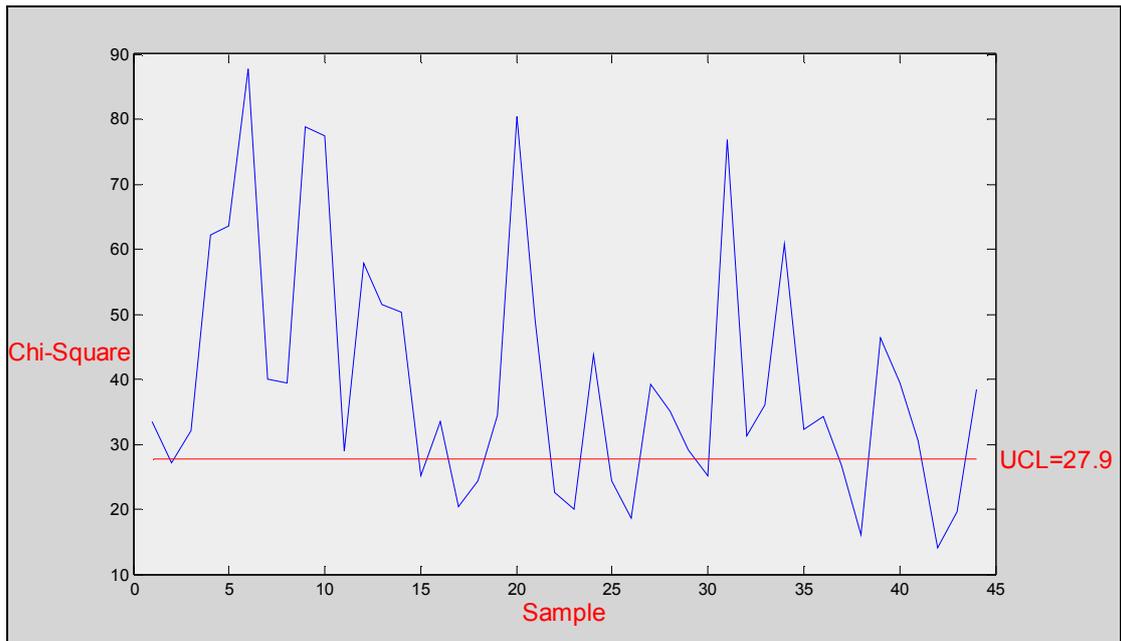
$$\chi_{13,0.01}^2 = 27.688 \quad , \quad \chi_{13,0.05}^2 = 22.362$$

سنقوم برسم لوحة χ_B^2 مع قيمة حد السيطرة العلوي وبمستوى المعنوية $(\alpha=0.01)$ باستخدام البرنامج نفسه الذي تمت كتابته بلغة (MATLAB) واللوحة هي كما موضح أدناه :



الشكل (4) يوضح لوحة χ^2_B عندما $(\alpha=0.05)$

تم رسم لوحة χ^2_B باستخدام برنامج تم كتابته بلغة (MATLAB) (أنظر الملحق A) وبالاعتماد على المعادلة (18) ، وكما هو واضح من اللوحة أن العملية الإنتاجية هي خارج السيطرة أيضاً لوجود قيم للإحصاءة χ^2 تجاوزت حد السيطرة العلوي للوحة ، إن قيمة حد السيطرة العلوي للوحة تمثل قيمة χ^2 بمستوى معنوية $(\alpha=0.05)$ ، سنقوم برسم لوحة χ^2_B مع قيمة χ^2 بمستوى المعنوية $(\alpha=0.01)$ باستخدام البرنامج نفسه الذي تم كتابته بلغة (MATLAB) واللوحة هي:



الشكل (5) يوضح لوحة χ^2_B عندما $(\alpha=0.01)$

يمكن أن نلاحظ من خلال لوحتي χ_B^2 أن كلا من اللوحتين أعطت إشارة خروج العملية الإنتاجية عن السيطرة وباختلاف مستوى المعنوية .

3: تطبيق لوحة (Bayesian – Xbar) :

سنقوم بتطبيق لوحة (Bayesian-Xbar) بالاعتماد على لوحة بيز التي تم تكوينها من قبل الباحثة [العاني، 2001] ، وباستخدام برنامج تمت كتابته بلغة (MATLAB) (أنظر الملحق (B) ، أي أننا سنقوم برسم قيم مقدر بيز ذي المعلومات (توقع التوزيع اللاحق لمعدل التوزيع الطبيعي عندما تكون σ^2 معلومة) بدلاً من الأوساط الحسابية في لوحة (X-bar) أي أن :

$$\hat{\theta}_B = \frac{\frac{\theta_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}, \quad \hat{\sigma}_B^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}$$

إذ أن :

θ_0 : تمثل القيمة الأولية للمعلمة θ والتي تحدد من الخبرة والتجارب السابقة إلا أننا سنعتمد

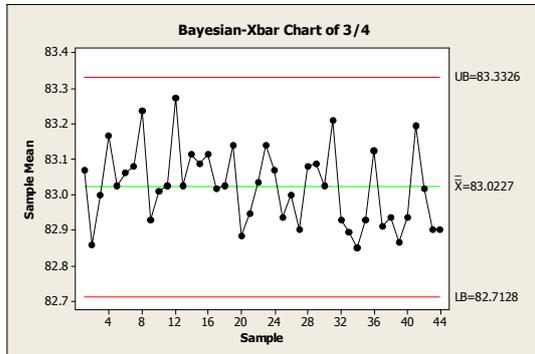
في تحديد قيمتها على معدل حدود المواصفة لكل متغير عند التطبيق .

σ_0^2 : تمثل القيمة الأولية للتباين والتي تحدد أيضاً عن طريق الخبرة والتجارب السابقة

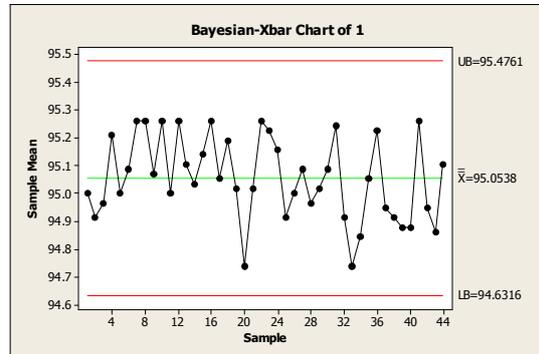
وسنعتمد على القيمة (0.2) عند التطبيق .

وهنا لأبدي أن نشير الى اننا سنقوم بتطبيق اللوحة مرة ضمن حدود اللوحة الاعتيادية أي عند $(\pm 3\sigma)$ ومرة أخرى ضمن حدود المواصفات العراقية لكل متغير لمعرفة أي من المتغيرات التي أعطت إشارة خروج العملية الإنتاجية عن السيطرة بالنسبة لذلك المتغير ، وقد تم الاعتماد على البرمجية الجاهزة (Minitab) في رسم كل من اللوحتين لكل متغير .

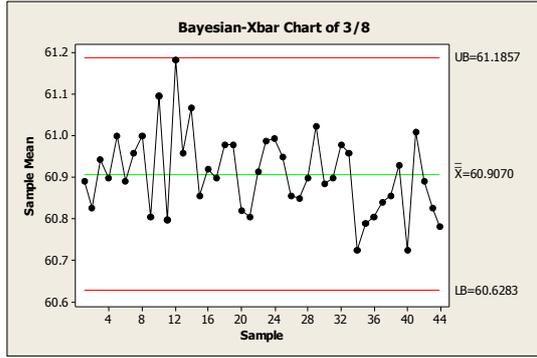
أولاً : لوحة السيطرة (Bayesian-Xbar) لكل متغير ضمن حدود $(\pm 3\sigma)$ وتشمل :



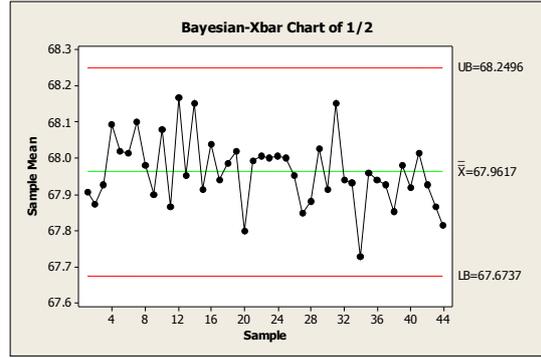
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريال 3/4)



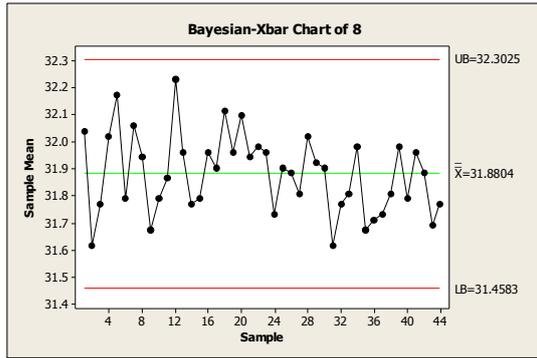
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريال 1)



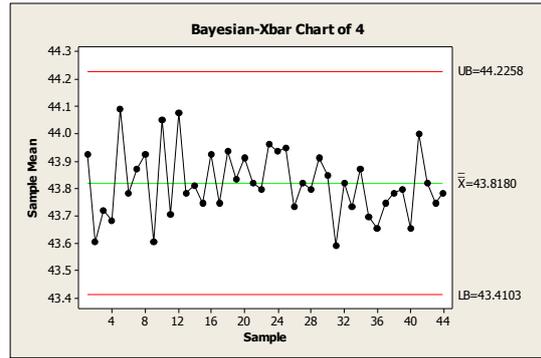
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال 3/8)



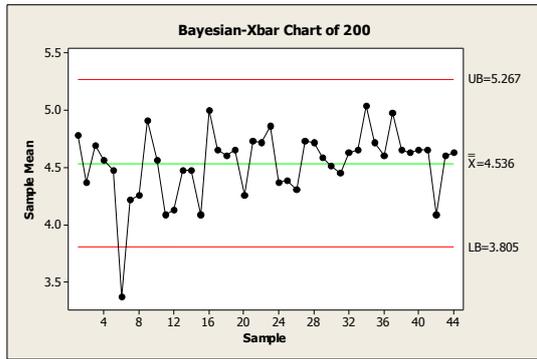
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال 1/2)



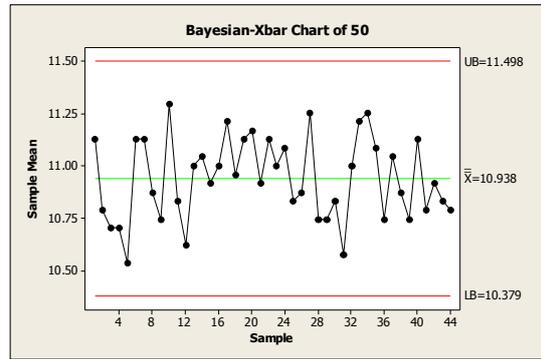
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال رقم 8)



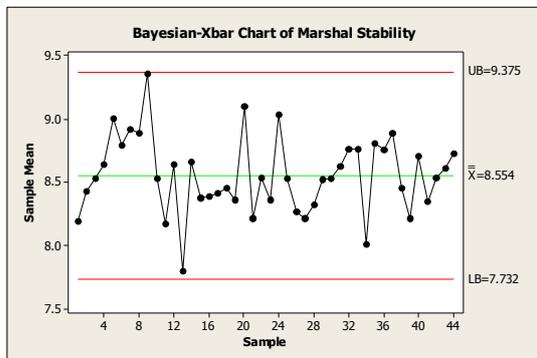
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال رقم 4)



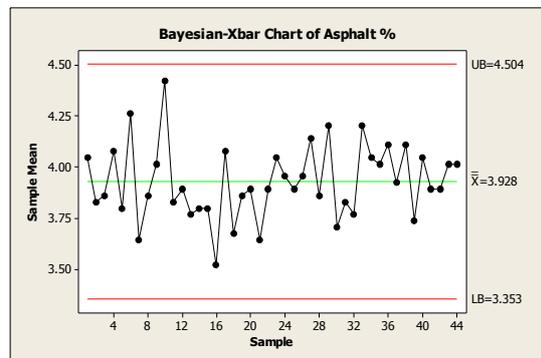
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال رقم 200)



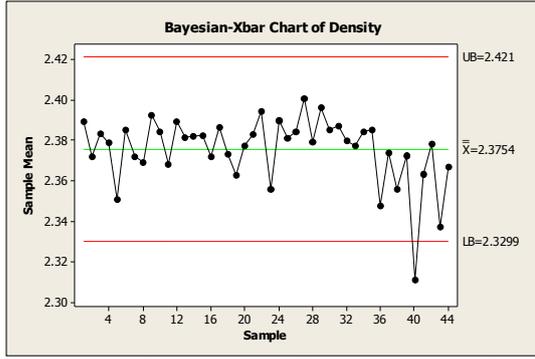
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال رقم 50)



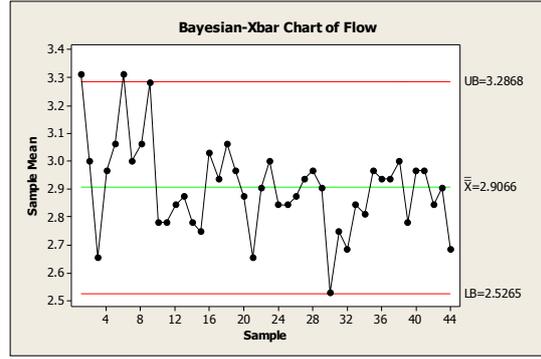
لوحة (B-Xbar) للمتغير (قوة ثبات النموذج)



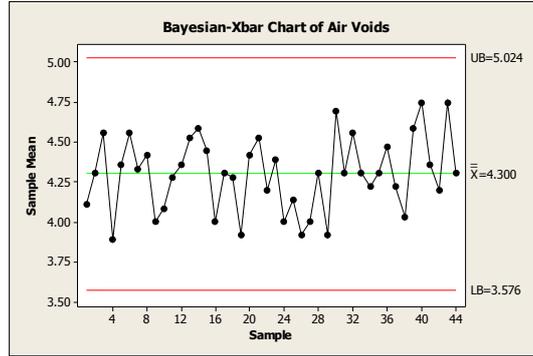
لوحة (B-Xbar) للمتغير (مادة الأسفلت)



لوحة (B-Xbar) للمتغير (كثافة النموذج)



لوحة (B-Xbar) للمتغير (زحف النموذج)

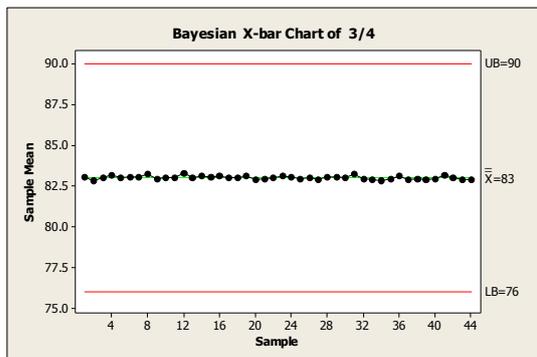


لوحة (B-Xbar) للمتغير (نسبة الفراغات الهوائية)

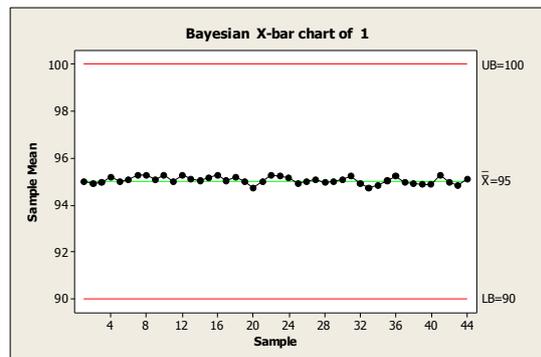
وبعد تطبيق لوحة (Bayesian-Xbar) على جميع المتغيرات قيد الدراسة يمكن أن نلاحظ من خلال اللوحات أعلاه بأنها أعطت إشارة خروج المتغيرات (الغريبال رقم 200 ، قوة الثبات للنموذج ، نسبة الزحف للنموذج ، كثافة النموذج) عن السيطرة وذلك لأن قيم مقدر بيز لبعض العينات قد وقعت خارج حدي السيطرة في اللوحة لكل متغير من هذه المتغيرات ما عدا المتغير (قوة الثبات للنموذج) يُعد خارج السيطرة على الرغم من وقوع جميع نقاط العينات ضمن حدود السيطرة ، وذلك لأن تلك النقاط لم تكن موزعة بشكل يتبع النمط الطبيعي على جانبي خط الهدف إذ يمكن ملاحظة ذلك بوضوح من خلال اللوحة .

ثانياً : لوحة السيطرة (Bayesian-Xbar) لكل متغير ضمن حدود المواصفات العراقية

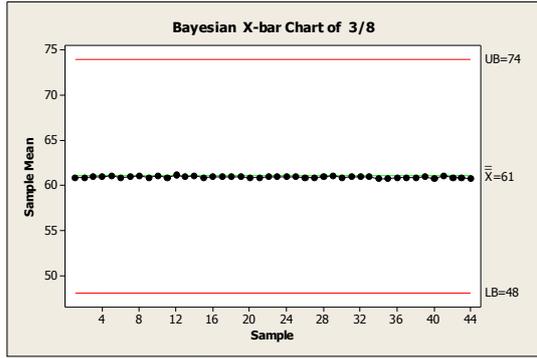
وتشمل :



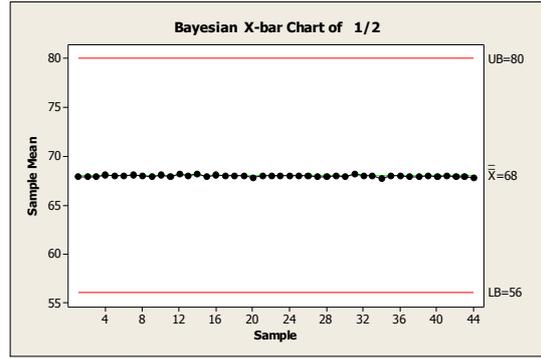
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال 3/4)



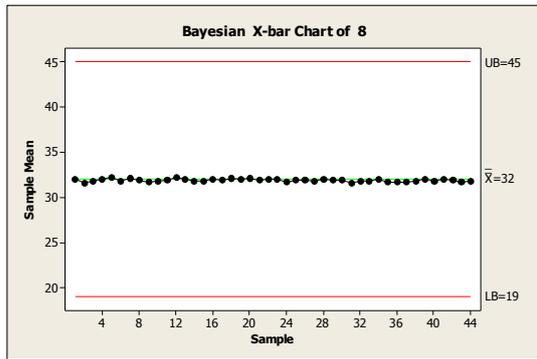
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال 1)



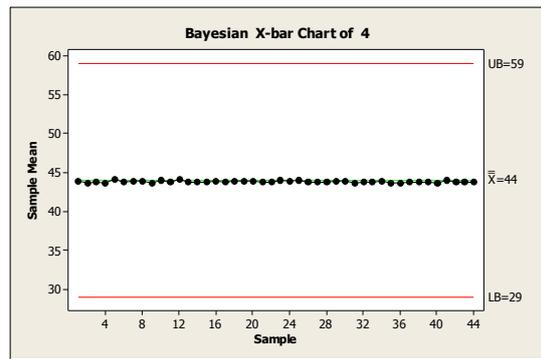
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال 3/8)



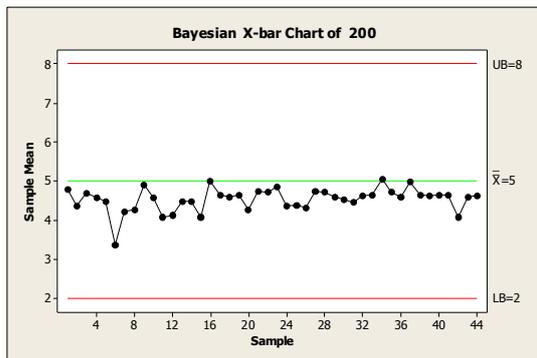
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال 1/2)



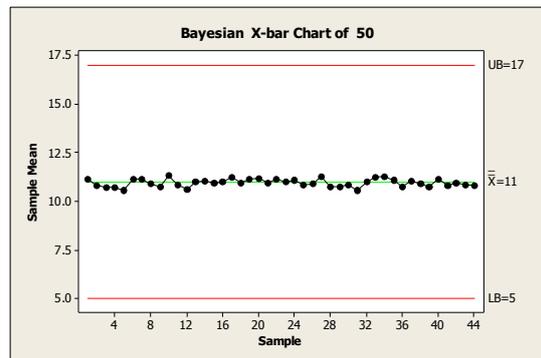
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال رقم 8)



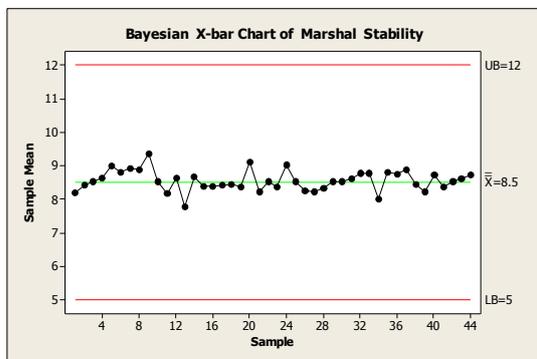
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال رقم 4)



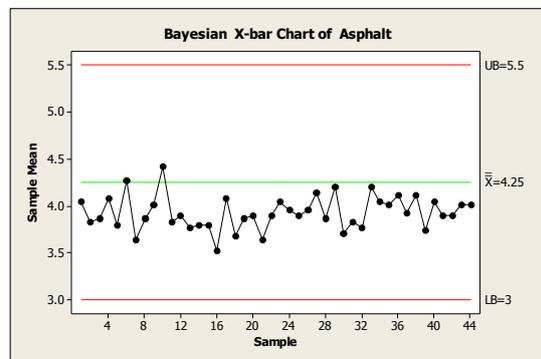
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال رقم 200)



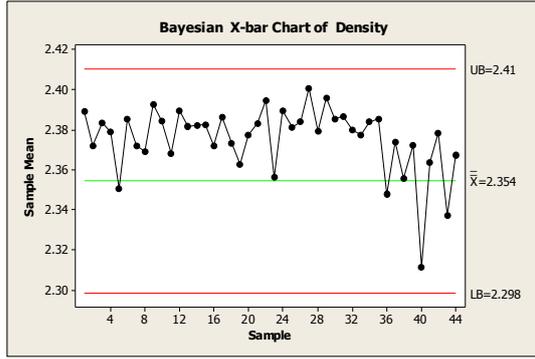
لوحة (B-Xbar) للمتغير (الغريبال رقم 50)



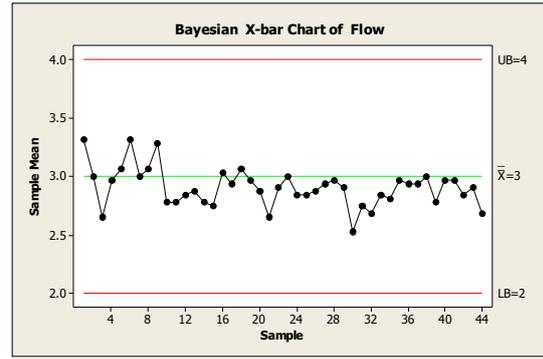
لوحة (B-Xbar) للمتغير (قوة ثبات النموذج)



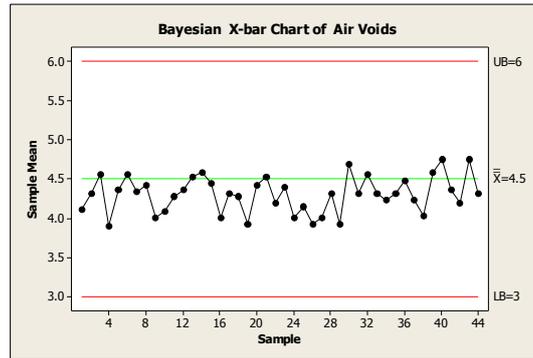
لوحة (B-Xbar) للمتغير (مادة الأسفلت)



لوحة (B-Xbar) للمتغير (كثافة النموذج)



لوحة (B-Xbar) للمتغير (زحف النموذج)



لوحة (B-Xbar) للمتغير (نسبة الفراغات الهوائية)

وبعد تطبيق لوحة (Bayesian-Xbar) ضمن حدود المواصفات العراقية لكل متغير يمكن أن نلاحظ أن اللوحة أعطت إشارة خروج المتغيرات (الغريال رقم 200 ، مادة الإسفلت ، نسبة الزحف للنموذج ، كثافة النموذج ، نسبة الفراغات الهوائية للنموذج) عن السيطرة وذلك لوقوع أكثر من نصف النقاط أسفل خط الهدف أيضاً وهذا يعني أنها لم تتوزع بشكل يتبع النمط الطبيعي على جانبي خط الهدف في اللوحة لكل من هذه المتغيرات ، ومن ثم فإن العملية الإنتاجية هي خارج السيطرة أيضاً وأن مادة الخرسانة الإسفلتية لم تكن واقعة ضمن حدود المواصفات العراقية المعمول بها وبالتالي فإن تلك المادة غير مطابقة للمواصفات وغير صالحة للاستخدام في الطبقة الأساس فيما يتعلق بسلوك كل من المتغيرات بشكل مستقل وضمن حدود المواصفات الخاصة بذلك المتغير ، وهنا يمكن ملاحظة أن لوحة (B-Xbar) لكل متغير ضمن حدود اللوحة الاعتيادية ($\pm 3\sigma$) أعطت إشارة خروج المتغيرات (الغريال رقم 200 ، قوة الثبات للنموذج ، نسبة الزحف للنموذج ، كثافة النموذج) والقرار بأن العملية الإنتاجية هي خارج السيطرة ، وأن اللوحة نفسها ضمن حدود المواصفات المتبعة أعطت إشارة خروج عدد أكبر من المتغيرات عن السيطرة إذ شملت المتغيرات (الغريال رقم 200 ، مادة الإسفلت ، نسبة الزحف للنموذج ، كثافة النموذج ، نسبة الفراغات الهوائية للنموذج) ، ومن ثم الحصول على نتيجة مطابقة فكان القرار بأن العملية الإنتاجية هي خارج السيطرة أيضاً .

وكما ذكرنا سابقاً أن لوحة (Bayesian-Xbar) ضمن حدود اللوحة الاعتيادية أعطت إشارة خروج أربعة متغيرات عن السيطرة بعدد قليل من العينات فإن لوحتي χ^2_B متعددي المتغيرات أعطتا إشارة خروج العملية الإنتاجية عن السيطرة ووجود الإنحرافات الكبيرة في العملية الإنتاجية نظراً لعدد العينات الواقعة خارج حد السيطرة العلوي بما يدل على وجود متغير أو أكثر من المتغيرات هو خارج السيطرة وهذا واضح من خلال المتغيرات الأربعة في لوحة (Bayesian-Xbar) كما ذكرنا آنفاً ، ويدل على أن العلاقة بين المتغيرات يكون لها تأثير في خصائص المادة المنتجة ومن ثم فإن عملية الفحص لكل متغير بشكل مستقل لا تعطي الدقة الكافية بمدى الانحرافات الموجودة في خصائص المادة المنتجة في حين أن عملية الفحص باستخدام لوحات السيطرة متعددة المتغيرات تعمل على كشف الانحرافات سواءً كانت نتيجة انحراف متغير أو أكثر من المتغيرات أو كانت نتيجة وجود علاقة بين المتغيرات ذات التأثير في خصائص المادة المنتجة لاسيما عند استخدام أسلوب بيز الذي يعتمد على أخذ المعلومات السابقة بنظر الاعتبار عند اتخاذ القرار .

الاستنتاجات :

- 1- تمتاز لوحة χ^2 بالشمولية من حيث مستوى المعنوية (α) فيمكن رسمها عند أي مستوى معنوية وذلك حسب الدقة المطلوبة من حيث كلفة الإنتاج وطبيعة المادة المنتجة .
- 2- عند تطبيق لوحة السيطرة χ^2 متعددة المتغيرات للسيطرة على معدل نوعية المادة المنتجة أعطت اللوحة إشارة خروج العملية الإنتاجية عن السيطرة من خلال وجود الانحرافات الكبيرة ووقوع عدد كبير من العينات خارج حد السيطرة ولمعرفة سلوك كل من المتغيرات بشكل مستقل تم تطبيق لوحة (Bayesian-Xbar) فكانت النتيجة خروج المتغيرات (الغريال 200 إنج ، قوة الثبات للنموذج ، نسبة الزحف للنموذج ، كثافة النموذج) ولأبد من الوقوف عند الأسباب التي أدت لخروج معدل العملية الإنتاجية عن السيطرة .

المصادر

- [1] - خليل ، أحمد ممتاز (2011) : " تكوين لوحات بيز متعددة المتغيرات للسيطرة على معدل وتباين نوعية تبليط الشوارع خارج مدينة الموصل " ، رسالة ماجستير ، قسم الإحصاء ، كلية علوم الحاسوب والرياضيات ، جامعة الموصل .
- [2] - Bersimis , S. , Psarakis , S. and Panaretos , j. , (2006) :
 “ Multivariate Statistical Process Control Chart : An Overview ” ,
 John Wiley & Sons , Ltd.
- [3] - Nedumaran , G. and Pignatiello JR. , J.J. , (1999) : “ On

Constructing T^2 Control Charts for On-line Process Monitoring ” ,
IIE Transactions , No.31 , PP. 529-536 .

- [4] - Press , S.J. , (1972) : “ Applied Multivariate Analysis Using
Bayesian and Frequentist Methods Of Inference ” , Dover
Publications , Inc. , Mineola , New York .
- [5] - Rehmert , I.J. , (1997) : “ A Performance Analysis Of The
Minimax Multivariate Quality Control Chart ” , Unpublished
MS.D. Thesis , The Faculty Of The Virginia Polytechnic Institute ,
State University .
- [6] - S. ÜMÝT OKTAY FIRAT RES , ÇÝĐDEM ARICIGÝL. (1999) :
“ Multivariate Quality Control : A Historical Perspective ” , 80750
Yildiz-Besiktas , Istanbul , Turkey .

(A) الملحق

```

a=[ يتم إدخال البيانات بشكل مصفوفة ];
b=mean(a);
c=cov(a);
d=inv(c);
g=a';
p=3;
q=p;
f=p-1;
m=length(a)/p;
h=[];
t=[];
u=[];
z=[];
n=[];
o=[];
x=[];
v=[];
s=0;
for j=1:m
s=0;
for i=(p-f):p
s=s+g(:,i);
end
h(:,j)=s/q;
t(j,1)=q*(h(:,j)-b')'*d*(h(:,j)-b');
p=p+q;
end
s=0;
for i=1:size(g,2)
u=g(:,i)-b';
s=s+(u*u');
end
o=1;
w=3;
v=((size(g,2)*b')+w*o)/(size(g,2)+w);
x=(b'-o)*(b'-o)';
z=(132+132+13+1)*inv(s+d+(((132*w)/135)*x));
for j=1:m
n(j,1)=q*(h(:,j)-v)'*(z)*(h(:,j)-v);
end
t;
n;

```

(B) الملحق

```
a=[يتم إدخال البيانات بشكل مصفوفة];
p=3;
q=p;
f=p-1;
z=cov(a);
b=8.5;
s=0;
k=[];
w=[];
x=[];
y=[];
t=[];
m=length(a)/p;
for j=1:m
s=0;
for i=(p-f):p
s=s+a(i,10);
end
k(j,1)=s/q;
w(j,1)=(b/0.2)+((3*k(j,1))/z(10,10))/((1/0.2)+(3/z(10,10)));
p=p+q;
end
for j=1:size(z,2)
x(j,1)=1/((1/0.2)+(3/z(j,j)));
y(j,1)=(x(j,1))^0.5;
t(j,1)=y(j,1)/3;
end
W;
t;
```

الملحق (C)

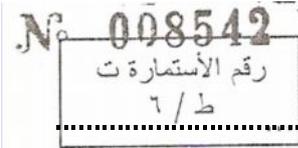
نموذج من البيانات التي تم الحصول عليها من الهيئة العامة للطرق والجسور / المديرية العامة للطرق والجسور في محافظة نينوى ، والتي تم الاعتماد عليها في الجانب التطبيقي .



وزارة الأعمار والاسكان

المركز الوطني للمختبرات والبحوث الانشائية

مختبر : نينوى الإنشائي



الى / مديرية طرق وجسور نينوى / د.م.م. لمشروع ماء السد

تقرير فحص / خرسانة إسفلتية (طبقة أساس)

بموجب مواصفة الهيئة العامة للطرق والجسور - R9

ندرج نتائج فحص النموذج المبين تفاصيله لاحقاً راجين الاطلاع وتسديد كلفة الفحص بموجب قائمة الطلب المرفقة ... مع التقدير

موقع النموذج	عدد النماذج	تاريخ تسلّم النموذج	قائمة الطلب		كتاب طلب الفحص	
			سنة	تسلسل	تاريخ	رقم
إنشاء طريق السد	3	2009/9/18	2009	2215	2009/9/16	36

حدود المواصفة	حدود معادلة المزج	(9)8281	(8)8280	(7)8279	الرقم المختبري	
		8/29	8/28	8/25	وجبة العمل ليوم	المحطة
		الفرع الثامن	+ الخامس يمين	+ الخامس يسار		
فحص التدرج / قياس						
...	مم	انج
100	100	100	100	100	37	1.5
100-90	97-90	69	96	95	25	1
90-76	90-80	(×)91	90	81	19	43
80-56	80-68	(×)81	80	(×)66	12.5	2\1
74-48	72-60	72	60	60	9.5	8\3
59-29	49-37	37	43	37	4.75	رقم 4
45-19	35-27	27	29	28	2.36	رقم 8
17-5	17-11	12	11	11	0.3	رقم 50
8-2	7.1-3.1	4.1	4.5	4.0	0.075	رقم 200
5.5-3	...	3.7	3.9	3.7	نسبة الإسفلت (%)	
5 (حد أدنى)	...	8.9	8.9	9.4	قوة ثبات نموذج مارشال (كن)	
4-2	...	2.8	2.8	2.7	زحف نموذج مارشال (مم)	
...	...	2.380	2.381	2.385	كثافة نموذج مارشال (غم/سم ³)	
6-3	...	4.6	4.7	4.5	نسبة الفراغات الهوائية %	
...	نسبة الحصى المكسر %	