

## الحل التقريبي لمعادلة الحرارة في ثلاثة أبعاد بطريقة أحادية البعد محلياً

محمود محمد حازم\*\*

د. عبد الغفور محمد أمين\*

### الملخص

في هذا البحث، تم حل إحدى المعادلات التفاضلية الجزئية من نوع القطع المكافئ في ثلاث أبعاد و هي معادلة الحرارة بطرائق أحادية البعد محلياً، و بمقارنة النتائج لهذه الطرائق مع الحل المضبوط، نلاحظ أن النتائج قريبة من الحل و خصوصاً الطريقة الضمنية (Crank-Nicholson). ثم تم دراسة الاستقرارية العددية و الاتساق العددي و التقارب العددي لهذه الطرائق تبين بأنها مستقرة بدون شروط مع الطريقة الضمنية (C-N) و مستقرة بشروط مع الطريقة الصريحة الاعتيادية، الاتساق و التقارب تم تحقيقهم.

### An approximate Solution of Heat Equation in Three Dimensions by LOD Method

#### Abstract

In this paper, we solve one of the parabolic partial differential equations in three dimensions which is heat equation with Locally One Dimension methods, and by comparing the results by this method with the exact solution, we see that the results are nearest to the solution and specially of the implicit method (Crank-Nicholson). Then we study the numerical stability, numerical consistency and numerical convergence of these methods which shows that it's unconditionally stable with (C-N)

\* أستاذ مساعد/كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل

\*\* طالب ماجستير/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل

and conditionally stable with explicit scheme. Consistence and converge are realized.

## Introduction

## 1. المقدمة

هذه الطرائق عُرفت بطريقة أحادية البعد محلياً (Locally One-Dimensional) أو تقريبات الانشطارية الجزئية (fractional splitting approximations) و مثل هذه الطرائق نوقشت بالتفصيل عن طريق Yanenko (1970) و Hubbard (1966) و Gourlay و Mitchell (1972 ، 1969) و كذلك Mitchell (1971) و Morris و Gourlay (1973) حيث أن Yanenko اقترح طريقة أحادية البعد محلياً لكونها من الطرائق الكفوءة التي تؤدي إلى تخفيض مسائل نوات بعدين أو ثلاثة أبعاد إلى نظام متعاقب من أحادية البعد و Morris (1970) قدم كذلك مقارنة مثيرة جداً بين طرائق (LOD) و طرائق أخرى كما طبق مسألة انسياب الحرارة مع مصدر حراري متقطع، وهذه الطرائق يتوقع أن تستخدم في بعض الحالات أو تحت بعض القيود عند كل أنواع الانشطار التي تكون مماثلة [3].

إن طرائق أحادية البعد محلياً (LOD) قدمت عن طريق علماء التحليل العددي في الاتحاد السوفيتي السابق و عولجت بالتفصيل عن طريق Yanenko بالمصطلح المستعمل في اغلب الأحيان طريقة الخطوات المجزأة أنجزها إلى حد لا بأس به، و لكن كثف معالجته بشروط عن طريق العلماء Mitchell و Griffiths و إن بناء طرائق أحادية البعد محلياً (LOD) يختلف عن طرائق أخرى في تلك المعادلات التفاضلية، إذ عادةً يكون الانشطار أولاً بشكل اتجاعي و النتيجة منفصلة بالطرائق القياسية لذلك هناك خطوتان رئيسيتان تتطلبان التحليل لتطبيق هذه التقنيات [12]

1- انشطار المعادلة التفاضلية.

2- انفصال لنتائج المعادلة الأحادية البعد (1-D).

تكون الفكرة الرئيسة لهذه الطرائق باستخدام الطرائق العددية التي تستبدل المعادلات التفاضلية الجزئية بالفروقات المنتهية عندما تظهر الاشتقاقات الجزئية في المعادلات التفاضلية الجزئية وتنتج معادلة جبرية وحيدة أو نظاماً من المعادلات الجبرية التي يؤدي حلها إلى حل المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية في نقاط مختارة على شبكة الحل، وإن شبكة الحل (التي تدعى باسم الشبكة الحسابية أو الشبكة العددية كذلك) تنشأ بتقسيم المحاور المتمثلة بالمتغيرات المستقلة في مجال الحل على عدد من الفترات و إن نقاط الفترة تمثل الحل و إذا رسمنا خطوطاً عمودية لنقاط الفترات على المحاور المعطاة تتكون لدينا شبكة وهذه الشبكة تدعى بالشبكة الحسابية [10].

إذ تقدم الباحثان B.J.Noye و K.J. Hayman في البحث [6] سنة (1994) بحل معادلة الانتشار معتمدة الزمن ذات بعدين باستخدام طرائق الفروقات المنتهية الانشطارية للزمن ذي الرتبة الرابعة تعني ذلك طريقة المتجهات الضمنية المتعاقبة (ADI)، وطريقة أحادية البعد محلياً (LOD) مع الشروط الحدودية لـ (Dirichlet) لاحظنا إن الطريقة الضمنية المتعاقبة (ADI) مستقرة بدون شروط، وإن الطريقة أحادية البعد محلياً (LOD) مستقرة بشروط واستنتجنا أن طريقة (ADI) أفضل بكثير في الحل العددي من طريقة (LOD).

في حين قدم الباحثان Jinggang Qin و Tongke Wang في البحث [8] سنة (2009) طرائق عددية كفوءة و دقيقة لحل المعادلات التفاضلية للقطع المكافئ باستخدام طريقة الفروقات المنتهية أحادية البعد محلياً (LOD)، التي لها دقة الرتبة الثانية بمرور الزمن، ودقة الرتبة الرابعة في الفضاء، ولقد استخدمنا الطريقة في حل معادلة القطع المكافئ غير المتجانسة ذات بعدين أو ذات ثلاثة الأبعاد، و عند مقارنة النتائج العددية للطريقة مع الطرائق المركبة الأخرى وجدنا أنها تحتاج إلى وقت أقل بكثير من وحدة المعالجة المركزية (CPU)، بينما ابقيا رتبة التقارب نفسها ولقد اثبتنا كذلك أن الطريقة تكون مستقرة بدون شروط، والنتائج العددية لهذه الطريقة (LOD) تتفوق على الطرائق الأخرى من ناحية الدقة والكلفة الحسابية.

في هذا البحث ندرس الحل التقريبي لنموذج من المعادلات التفاضلية الجزئية في ثلاثة أبعاد من نوع القطع المكافئ باستخدام طرائق أحادية البعد محلياً (LOD) التي تشتر المعادلة ثلاثية الأبعاد إلى ثلاث معادلات متعاقبة بانتظام نوات بعد واحد وعلى وفق ذلك نستخدم طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية هما:-

1- الطريقة الصريحة (Explicit scheme)

2- الطريقة الضمنية (Crank-Nicholson)

نشق أولاً صيغ الفروقات المنتهية للطرائق أحادية البعد محلياً (طرائق الصريحة والضمنية (C-N)) للمعادلة المعطاة ومقارنة النتائج العددية مع الحل المضبوط كذلك، ونختبر الاستقرار العددية و الاتساق العددي و التقارب العددي للطرائق.

## Mathematical Model

## 2. النموذج الرياضي

في حالة المعادلات التفاضلية الجزئية من نوع القطع المكافئ في ثلاثة ابعاد يكون

النموذج الآتي:-

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

(1)

حيث إن  $0 \leq x, y, z \leq a$  و  $t \geq 0$ ،

و أن  $u \equiv u(x, y, z, t)$  تدل على درجة الحرارة لأية نقطة محدد مكانها في الموقع  $(x, y, z)$  لحجم المستطيل في أي وقت كان  $t$  [5]، [11].

الشروط الحدودية و الابتدائية للمعادلة (1) و حسب الفترة لكل واحدة منهما يكون على وفق ما يأتي:-

$$u(x, y, z, 0) = g(x, y, z) \quad (0 \leq x, y, z \leq a) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) &= f_1(y, z, t), \\ u(a, y, z, t) &= f_2(y, z, t) \end{aligned} \quad (0 \leq y, z \leq a; t \geq 0) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0, z, t) &= f_3(x, z, t), \\ u(x, a, z, t) &= f_4(x, z, t) \end{aligned} \quad (0 \leq x, z \leq a; t \geq 0) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, 0, t) &= f_5(x, y, t), \\ u(x, y, a, t) &= f_6(x, y, t) \end{aligned} \quad (0 \leq x, y \leq a; t \geq 0) \quad (5)$$

حيث أن  $g$  ،  $f_1$  ،  $f_2$  ،  $f_3$  ،  $f_4$  ،  $f_5$  ،  $f_6$  دوال معروفة وأن المعادلة (2) تمثل الشرط الابتدائي والمعادلات (3) و (4) و (5) تمثل الشروط الحدودية لكل من  $(x, y, z)$  على التوالي.

### 3. اشتقاق طرائق أحادية البعد محلياً (Locally One-Dimensional):-

#### 1- الطريقة الصريحة (Explicit scheme) الاعتيادية :

نقوم فيما يأتي بتوضيح حساب تقريبات الفروقات المنتهية للدالة  $u(x, y, z, t)$  في المعادلة (1) بتطبيق الطريقة الصريحة الاعتيادية، إذ إن الطريقة الصريحة الاعتيادية تستخدم في حالة المعادلات التفاضلية الجزئية ذوات البعد الواحد و لكن في حالة المعادلة (1) ثلاثية الأبعاد لا يمكن تطبيقها مباشرةً إلا بعد تخفيض المعادلة ثلاثية الأبعاد إلى معادلات ذوات بعد واحد متعاقبة بانتظام باستخدام طريقة أحادية البعد محلياً (LOD).

لذا نقوم بشرط المعادلة (1) إلى ثلاث معادلات متعاقبة بانتظام ذوات بعد واحد على النحو الآتي:-

$$\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8)$$

و بناءً على ذلك سنقسم مجال المكعب  $(x, y, z)$  على مشبك من النقاط للمتغيرات المستقلة  $x, y, z$ ، وكذلك للزمن  $t$  كما يأتي:-

$$t = n\Delta t, \quad z = k\Delta z, \quad y = j\Delta y, \quad x = i\Delta x$$

$$\text{حيثُ إن } i, j, k, n = 0, 1, 2, \dots$$

ثم بعد ذلك نحسب تقريبات الفروقات المنتهية للمعادلات (6) و (7) و (8) كل واحدة على حده عند كل مشبك من النقاط الذي يكون لكل متغير مستقل واحد في اتجاهات مختلفة و نبدأ في الاتجاه  $x$  بتطبيق تقريبات الفروقات المنتهية لـ  $u_t$  و  $u_{xx}$  التي تكون فروقات أمامية لـ  $t$  و فروقات مركزية للمتغير المستقل (الفضاء)  $x$  بالنسبة للمعادلة (6) على النحو الآتي:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} \quad (9)$$

نضرب المعادلة (9) بـ  $\Delta t$  و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ ، و بتبسيط المعادلة و جمع الحدود المتشابهة نحصل على المعادلة (10)

$$u_{i,j,k}^{n+1} = (1 - 6r)u_{i,j,k}^n + 3ru_{i-1,j,k}^n + 3ru_{i+1,j,k}^n \quad (10)$$

في الاتجاه  $y$  نطبق تقريبات الفروقات المنتهية لـ  $u_t$  و  $u_{yy}$  التي تكون فروقات أمامية لـ  $t$  و فروقات مركزية للمتغير المستقل (الفضاء)  $y$  بالنسبة للمعادلة (7) على النحو الآتي:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n}{(\Delta y)^2} \quad (11)$$

نضرب المعادلة (11) بـ  $\Delta t$  و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$ ، و بتبسيط المعادلة و جمع الحدود المتشابهة نحصل على المعادلة (12)

$$u_{i,j,k}^{n+1} = (1 - 6r)u_{i,j,k}^n + 3ru_{i,j-1,k}^n + 3ru_{i,j+1,k}^n \quad (12)$$

و كذلك يكون في الاتجاه  $Z$  تطبيق تقريبات الفروقات المنتهية لـ  $u_t$  و  $u_{zz}$  التي تكون فروقات أمامية لـ  $t$  و فروقات مركزية للمتغير المستقل (الفضاء)  $Z$  بالنسبة للمعادلة (8) على النحو الآتي:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{u_{i,j,k-1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k+1}^n}{(\Delta z)^2} \quad (13)$$

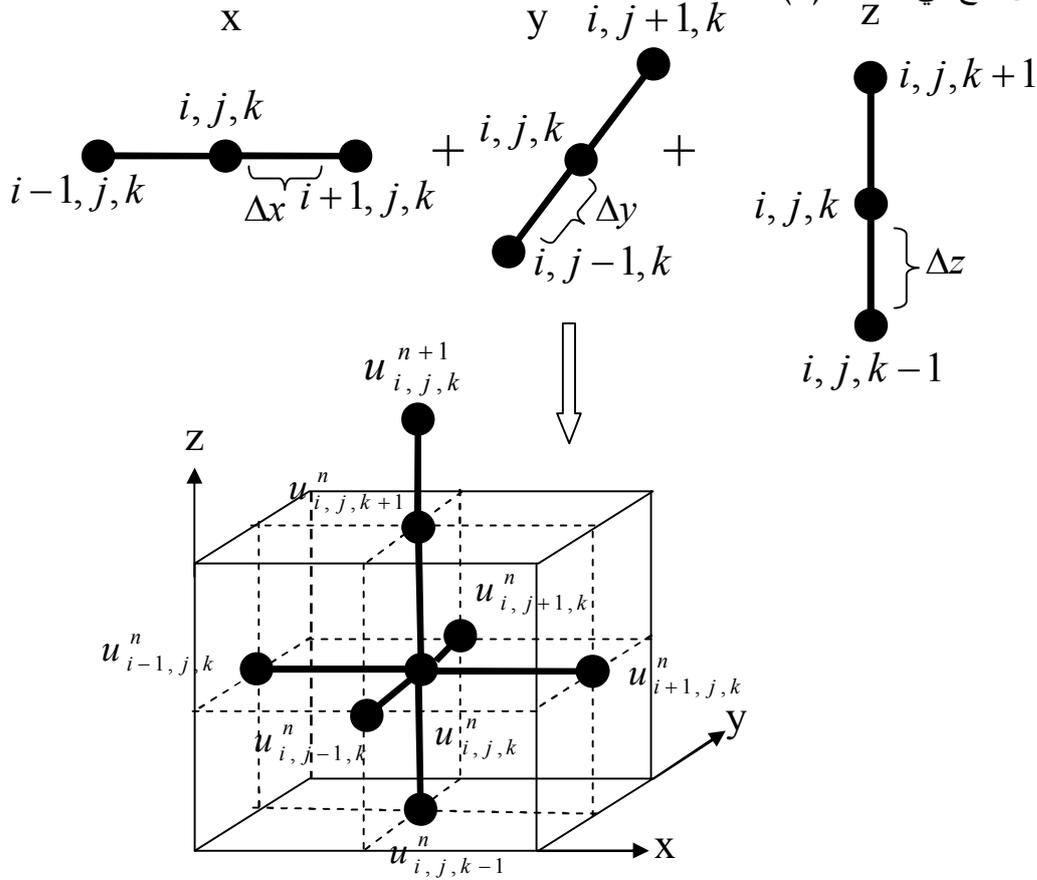
نضرب المعادلة (13) بـ  $\Delta t$  و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}$ ، و بتبسيط المعادلة وجمع الحدود المتشابهة

نحصل على المعادلة (14)

$$u_{i,j,k}^{n+1} = (1 - 6r)u_{i,j,k}^n + 3ru_{i,j,k-1}^n + 3ru_{i,j,k+1}^n \quad (14)$$

و عليه نعالج كل من المعادلات (10) و (12) و (14) عن طريق استخدام الطريقة الصريحة الاعتيادية لبعد واحد لحساب المستوي  $(n+1)$  بالاعتماد على المستوي الذي قبله  $n$ ، و بجمع النتائج التقريبية للمعادلات الثلاث أعلاه سنحصل على حل المعادلة (1) الأصلية ثلاثية الأبعاد

و كما موضح في الشكل (1)



الشكل (1)

يوضح انشطار المعادلة (1) ثلاثية الأبعاد باستخدام طرائق أحادية البعد محلياً (LOD) إلى اتجاهات  $x, y, z$  لمعادلات ببعد واحد لإيجاد الحل التقريبي للطريقة الصريحة الاعتيادية.

## 2- الطريقة الضمنية (Crank-Nicholson) :

اكتشفت هذه الطريقة في عام 1947 من العالمين John Crank و Phyllis Nicholson مستندة الى التقريبات العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية [4] وسنقوم فيما يأتي بتوضيح حساب تقريبات الفروقات المنتهية للدالة  $u(x, y, z, t)$  في المعادلة (1) بتطبيق الطريقة الضمنية (C-N) وإذ إن طريقة (C-N) تستخدم في حالة المعادلات التفاضلية الجزئية ذات البعد الواحد و لكن في حالة المعادلة (1) ثلاثية الأبعاد لا يمكن تطبيقها مباشرةً لصعوبة معالجة النقاط التي تكون في اتجاهات مختلفة  $(z, y, x)$  فنلجأ إلى تخفيض المعادلة ثلاثية الأبعاد إلى معادلة ذات بعد واحد لكي يسهل التعامل مع النقاط و معالجتها و يكون ذلك باستخدام طريقة أحادية البعد محلياً (LOD)، و حيثُ إن طريقة (C-N) تعتمد على اخذ المعدل الحسابي لمعادلة الفروقات عند المتغيرات المستقلة (الفضاء)، لذا بعد التخفيض نأخذ المعدل الحسابي للمتغيرات المستقلة  $x, y, z$  عند الزمن  $n$  و  $n+1$  و تكون المعادلات الفرقية عند الزمن  $t$  في  $n+1/2$  الذي يقع بين المستويات للمكعبات.

لذا نقوم بشرط المعادلة (1) إلى ثلاث معادلات متعاقبة بانتظام ذات بعد واحد على النحو الآتي:-

$$\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (15)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (16)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (17)$$

و بناءً على ذلك سنقسم مجال المكعب  $(x, y, z)$  على مشبك من النقاط للمتغيرات المستقلة  $x, y, z$ ، و كذلك للزمن  $t$  على النحو الآتي:-

$$t = n\Delta t, \quad z = k\Delta z, \quad y = j\Delta y, \quad x = i\Delta x$$

$$\text{حيثُ إن } i, j, k, n = 0, 1, 2, \dots$$

ثم بعد ذلك نحسب المعدل الحسابي لتقريبات الفروقات المنتهية للمعادلات (15) و (16) و (17) كل واحدة على حده عند كل مشبك من النقاط لكل متغير مستقل واحد في اتجاهات

مختلفة و نبدأ في الاتجاه  $x$  بتطبيق تقريبات الفروقات المنتهية لـ  $u_t$  و  $u_{xx}$  بالنسبة للمعادلة (15) التي تكون فروقات مركزية لـ  $u_t$  و معدلاً حسابياً لـ  $u_{xx}$  على النحو الآتي:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} [u_{i-1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i+1,j,k}^{n+1} + u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n] \quad (18)$$

نضرب المعادلة (18) بـ  $\Delta t$  و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  ثم بعد ذلك نحصل على

$$2u_{i,j,k}^{n+1} - 3r(u_{i-1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i+1,j,k}^{n+1}) = 2u_{i,j,k}^n + 3r(u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n)$$

و بعد التبسيط و جمع الحدود المتشابهة نحصل على المعادلة (19)

$$(2 + 6r)u_{i,j,k}^{n+1} - 3ru_{i-1,j,k}^{n+1} - 3ru_{i+1,j,k}^{n+1} = (2 - 6r)u_{i,j,k}^n + 3ru_{i-1,j,k}^n + 3ru_{i+1,j,k}^n \quad (19)$$

في الاتجاه  $y$  نطبق تقريبات الفروقات المنتهية لـ  $u_t$  و  $u_{yy}$  بالنسبة للمعادلة (16) التي تكون فروقات مركزية لـ  $u_t$  و معدلاً حسابياً لـ  $u_{yy}$  على النحو الآتي:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2(\Delta y)^2} [u_{i,j-1,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j+1,k}^{n+1} + u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n] \quad (20)$$

نضرب المعادلة (20) بـ  $\Delta t$  و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$  ثم بعد ذلك نحصل على

$$2u_{i,j,k}^{n+1} - 3r(u_{i,j-1,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j+1,k}^{n+1}) = 2u_{i,j,k}^n + 3r(u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n)$$

و بعد التبسيط و جمع الحدود المتشابهة نحصل على المعادلة (21)

$$(2 + 6r)u_{i,j,k}^{n+1} - 3ru_{i,j-1,k}^{n+1} - 3ru_{i,j+1,k}^{n+1} = (2 - 6r)u_{i,j,k}^n + 3ru_{i,j-1,k}^n + 3ru_{i,j+1,k}^n \quad (21)$$

وكذلك يكون في الاتجاه  $z$  تطبيق تقريبات الفروقات المنتهية لـ  $u_t$  و  $u_{zz}$  بالنسبة للمعادلة (17) التي تكون فروقات مركزية لـ  $u_t$  و معدلاً حسابياً لـ  $u_{zz}$  على النحو الآتي:-

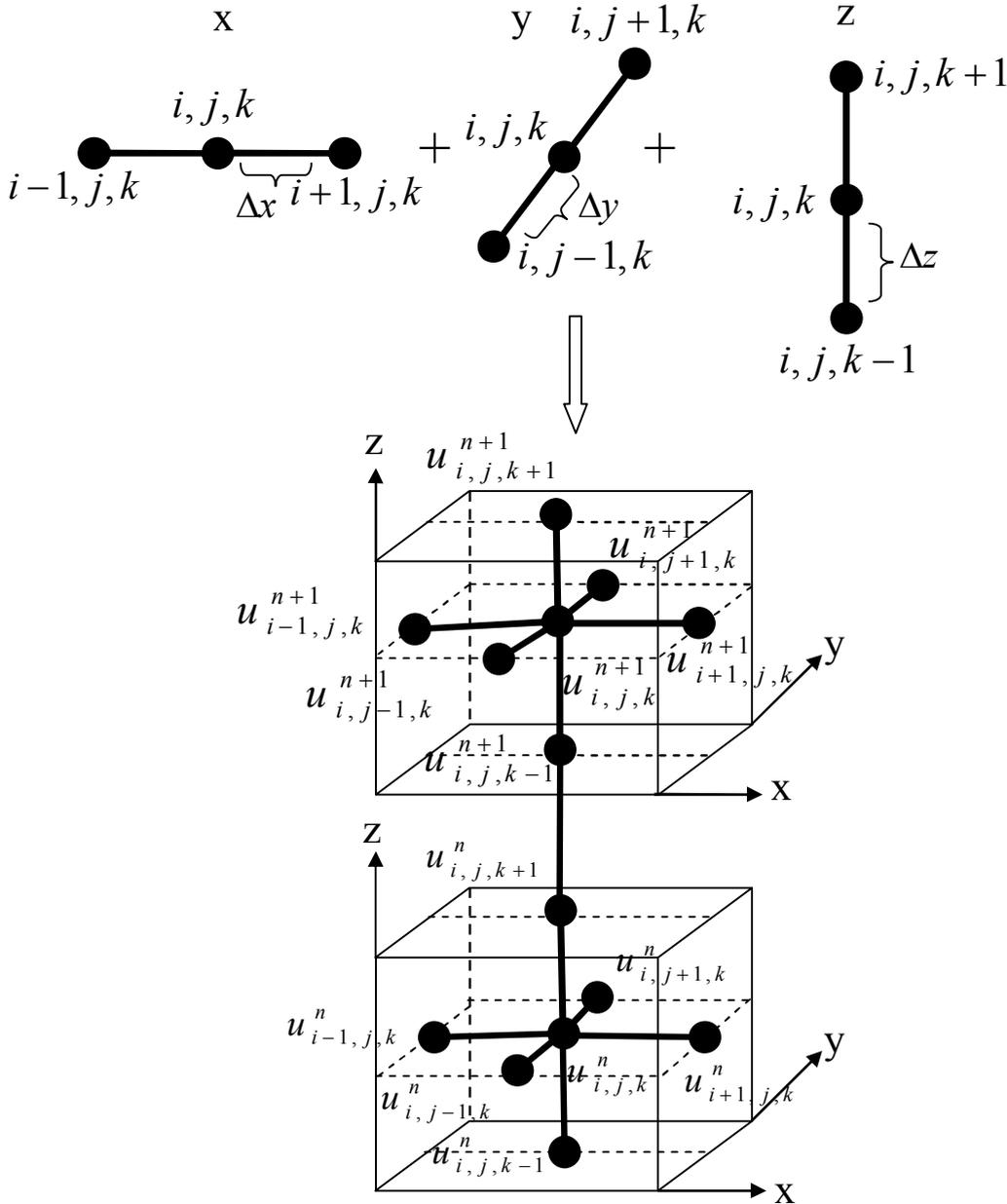
$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2(\Delta z)^2} [u_{i,j,k-1}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j,k+1}^{n+1} + u_{i,j,k-1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k+1}^n] \quad (22)$$

نضرب المعادلة (22) بـ  $\Delta t$  و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}$  ثم بعد ذلك نحصل على



المباشرة (Direct Methods) كطريقة كاوس-جوردان (Gauss-Jordan) أو بالطرائق التكرارية (Iterative Methods).

وعلى هذا الأساس و بعد معالجة كل من المعادلات (19) و (21) و (23) وذلك بالطريقة الضمنية (C-N) لبعد واحد لحساب المستوي  $(n+1)$  في الجانب الأيسر بالاعتماد على المستوي  $n$  بالجانب الأيمن و بجمع النتائج التقريبية للمعادلات الثلاث سنحصل على حل المعادلة (1) الأصلية ثلاثية الأبعاد و كما موضح في الشكل (2)



الشكل (2)

يوضح انشطار المعادلة (1) ثلاثية الأبعاد باستخدام طرائق أحادية البعد محلياً (LOD) إلى اتجاهات  $x, y, z$  لمعادلات ببعد واحد لإيجاد الحل التقريبي للطريقة الضمنية (C-N).

## Numerical Stability

## 4. الاستقرارية العددية

الاستقرارية طريقة تُعطى لحل مجموعة من المعادلات التفاضلية بمقياس نظري من المدى الذي ينتج الطرائق التي تحقق التقريبات للفروقات المنتهية، و الاستقرارية للطرائق العددية ترتبط مباشرةً بالخطأ العددي حيثُ أن أي طريقة فروقات منتهية تكون مستقرة إذا جعلت الأخطاء في خطوة زمنية واحدة من الحسابات لا تتسبب في زيادة الأخطاء في الحسابات المستمرة و أية طريقة مستقرة بشكل محايد في فترة زمنية تكون فيها الأخطاء ثابتة في الحسابات القادمة و أيضاً تتلاشى الأخطاء تدريجياً و في النهاية تتضاءل خارجاً فإن الطريقة العددية يقال عنها إنها تكون مستقرة و إذا بالعكس فإن الأخطاء تنمو بمرور الوقت و يتباعد الحل العددي من الحقيقي و من الجواب الصحيح و هكذا الطريقة العددية يقال بأنها تكون غير مستقرة [9].

إن استقرارية فون نيومان (Von-Neumann) أو فوريير (Fourier) ضرورية و كافية لإيجاد الاستقرارية للمعادلات التفاضلية الجزئية، حيثُ إن الملاحظة الأساسية في طريقة فوريير (Fourier) بأن الطرائق العددية تكون خطية و لذا سيكون لها حلول في شكل  $u(t, x) = \lambda^t e^{i\alpha x}$  حيثُ أن الطرائق العددية لها شرط الاستقرارية إذا كان  $|\lambda| < 1$  و غير مستقرة حينما  $|\lambda| > 1$  [3].

### 4.1 تحليل الاستقرارية العددية لطرائق أحادية البعد محلياً (LOD) :-

أولاً : تحليل الاستقرارية العددية للطريقة الصريحة (Explicit scheme) الاعتيادية

#### باستخدام طريقة (Von-Neumann (Fourier)

إن استخدام تحليل الاستقرارية العددية للطريقة الصريحة الاعتيادية لا يمكن تطبيقها مباشرةً على معادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ (Parabolic) في ثلاثة أبعاد كما في معادلة (1) إلا بعد تخفيضها إلى معادلات متعاقبة بانتظام أحادية البعد باستخدام طريقة أحادية البعد محلياً (LOD) و بعد ذلك يمكننا تطبيق طريقة (Von-Neumann (Fourier) على المعادلات أحادية البعد بانتظام، حيثُ إن طريقة فون نيومان (Von-Neumann) تستخدم لدراسة تحليل الاستقرارية العددية لنموذج القطع المكافئ (Parabolic) في ثلاثة أبعاد و نحنُ يمكن أن نطبق هذه الطريقة باستبدال الحل في طريقة الفروقات المنتهية عند الزمن  $t$  من خلال

$$u_{i,j,k}^n = \psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} \text{ عندما } \alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ و } m = \sqrt{-1}$$

حيثُ إن من تقريبات الفروقات المنتهية لمعادلة (6) الخطية بالنسبة إلى  $x$  نستخدم المعادلة الآتية:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} \quad (24)$$

نفرض أن  $u_{i,j,k}^n = \psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}$  و  $u_{i,j,k}^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}$  ونعوضهما في المعادلة (24) بعد ذلك نحصل على:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\psi(t + \Delta t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} - \psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left( \psi(t) e^{m\alpha(x-\Delta x)} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} - 2\psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} + \psi(t) e^{m\alpha(x+\Delta x)} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} \right)$$

نقسم الطرفين على  $e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}$  و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  و بعد التبسيط و الاختصار نحصل على:-

$$\psi(t + \Delta t) - \psi(t) = 3r\psi(t) \left[ e^{-m\alpha\Delta x} - 2 + e^{m\alpha\Delta x} \right]$$

بعد إعادة الترتيب و التبسيط نحصل على:-

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 + 3re^{-m\alpha\Delta x} - 6r + 3re^{m\alpha\Delta x}$$

و باستخدام صيغة اويلر (Euler) للدوال الأسية على النحو الآتي:-

$$e^{-m\alpha\Delta x} = \cos(\alpha\Delta x) - m \sin(\alpha\Delta x)$$

$$e^{m\alpha\Delta x} = \cos(\alpha\Delta x) + m \sin(\alpha\Delta x)$$

نعوضهما في المعادلة أعلاه ينتج الآتي:-

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - 6r + 6r \cos(\alpha\Delta x)$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - 6r + 6r \left( 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\alpha\Delta x}{2} \right) \right)$$

بعد التبسيط و الاختصار نُحصل على:-

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - 12r \sin^2 \left( \frac{\alpha\Delta x}{2} \right)$$

إذن نضع

$$\xi_1 = 1 - 12r \sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right) \quad (25)$$

كذلك باستخدام تقريبات الفروقات المنتهية لمعادلة (7) الخطية بالنسبة إلى  $y$  نستخدم المعادلة الآتية:-

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t}\right) = \frac{u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n}{(\Delta y)^2} \quad (26)$$

نفرض أن  $u_{i,j,k}^n = \psi(t)e^{m\alpha x}e^{m\beta y}e^{m\gamma z}$  و  $u_{i,j,k}^{n+1} = \psi(t + \Delta t)e^{m\alpha x}e^{m\beta y}e^{m\gamma z}$  ونعوضهما في المعادلة (26) بعد ذلك نحصل على:-

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\psi(t + \Delta t)e^{m\alpha x}e^{m\beta y}e^{m\gamma z} - \psi(t)e^{m\alpha x}e^{m\beta y}e^{m\gamma z}}{\Delta t}\right) = \frac{1}{(\Delta y)^2}\left(\psi(t)e^{m\alpha x}e^{m\beta(y-\Delta y)}e^{m\gamma z} - 2\psi(t)e^{m\alpha x}e^{m\beta y}e^{m\gamma z} + \psi(t)e^{m\alpha x}e^{m\beta(y+\Delta y)}e^{m\gamma z}\right)$$

نقسم الطرفين على  $e^{m\alpha x}e^{m\beta y}e^{m\gamma z}$  ونضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$  و بعد التبسيط و الاختصار نحصل على:-

$$\psi(t + \Delta t) - \psi(t) = 3r\psi(t)\left[e^{-m\beta\Delta y} - 2 + e^{m\beta\Delta y}\right]$$

بعد إعادة الترتيب و التبسيط نحصل على:-

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 + 3re^{-m\beta\Delta y} - 6r + 3re^{m\beta\Delta y}$$

إذ إن

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - 6r + 6r \cos(\beta\Delta y)$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - 6r + 6r\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta\Delta y}{2}\right)\right)$$

بعد التبسيط و الاختصار نحصل على:-

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - 12r \sin^2\left(\frac{\beta \Delta y}{2}\right)$$

إذن نضع

$$\xi_{II} = 1 - 12r \sin^2\left(\frac{\beta \Delta y}{2}\right) \quad (27)$$

بتطبيق أسلوب الإجراءات السابقة نفسة لتقريبات الفروقات المنتهية لمعادلة (8) الخطية بالنسبة إلى  $Z$  نحصل على:-

$$\xi_{III} = 1 - 12r \sin^2\left(\frac{\gamma \Delta z}{2}\right) \quad (28)$$

و هكذا وجدنا أن تلك عوامل التضخم باستخدام طريقة فون نيومان (Von-Neumann) لتحليل الاستقرار العددية للطريقة الصريحة الاعتيادية بعد تخفيض معادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ (Parabolic) ثلاثية الأبعاد إلى معادلات ذات بعد واحد باستخدام طريقة أحادية البعد محلياً (LOD) التي هي في المعادلات (25) و (27) و (28).

الآن نثبت الاستقرار العددية كل واحدة على انفراد من استخدام شرط الاستقرار الذي يكون في الحالات  $|\xi_I| \leq 1$  ،  $|\xi_{II}| \leq 1$  ،  $|\xi_{III}| \leq 1$  نأخذ كل حالة على انفراد و نبين قيم  $r$  التي تحقق شرط الاستقرار .

نأخذ الحالة الأولى  $|\xi_I| \leq 1$  من معادلة (25) كما يأتي:-

$$\left| 1 - 12r \sin^2\left(\frac{\alpha \Delta x}{2}\right) \right| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq 1 - 12r \sin^2\left(\frac{\alpha \Delta x}{2}\right) \leq 1$$

لبعض قيم  $\alpha$  يكون لدينا  $\sin^2\left(\frac{\alpha \Delta x}{2}\right) = 1$  و عليه نحصل على:-

$$-1 \leq 1 - 12r \leq 1$$

نأخذ الجانب الأيسر من المتباينة حيث أن الجانب الأيمن صحيح دائماً ثم بعد ذلك يكون عندنا

$$-1 \leq 1 - 12r \Rightarrow -2 \leq -12r$$

بعد التبسيط و الترتيب نحصل على:-  $0 \leq r_1 \leq \frac{1}{6}$  و بهذا يكون لدينا  $r \leq \frac{1}{6}$

بالأسلوب نفسه نطبق الإجراءات السابقة مع الحالات  $\xi_{II}$  في المعادلة (27) و  $\xi_{III}$  في المعادلة (28) نجد أن  $0 \leq r_{II} \leq \frac{1}{6}$  و  $0 \leq r_{III} \leq \frac{1}{6}$  فتكون مجتمعةً في المعادلات المنشطرة أحادية البعد محلياً (LOD) فهذا يبين أن الطريقة الصريحة الاعتيادية للمعادلات المنشطرة باستعمال طريقة ثلاثية الأبعاد كما في المعادلة (1).

### ثانياً : تحليل الاستقرار العددية للطريقة الضمنية (Crank Nicholson) باستخدام طريقة Von-Neumann (Fourier)

نستخدم المعادلات المتعاقبة بانتظام المنشطرة إلى معادلات تفاضلية جزئية أحادية البعد من معادلة (1) بعد تخفيضها باستخدام طريقة أحادية البعد محلياً (LOD) لإيجاد تحليل الاستقرار العددية للطريقة الضمنية (C-N) باستخدام طريقة Von-Neumann (Fourier) على المعادلات المتعاقبة بانتظام ذات بعد واحد.

حيث إن من تقريبات الفروقات المنتهية لمعادلة (15) الخطية بالنسبة إلى  $x$  نستخدم المعادلة الآتية:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} [u_{i-1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i+1,j,k}^{n+1} + u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n] \quad (29)$$

نفرض أن  $u_{i,j,k}^{n+1} = \psi(t + \Delta t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}$  و  $u_{i,j,k}^n = \psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}$  ونعوضهما في المعادلة (29) ثم بعد ذلك نحصل على:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\psi(t + \Delta t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} - \psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} [\psi(t + \Delta t) e^{m\alpha(x-\Delta x)} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} - 2\psi(t + \Delta t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} + \psi(t + \Delta t) e^{m\alpha(x+\Delta x)} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} + \psi(t) e^{m\alpha(x-\Delta x)} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} - 2\psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} + \psi(t) e^{m\alpha(x+\Delta x)} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}]$$

نقسم الطرفين على  $e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}$  ونضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  و بعد التبسيط و الاختصار نحصل على:-

$$2\psi(t + \Delta t) - 2\psi(t) = 3r [\psi(t + \Delta t) e^{-m\alpha\Delta x} - 2\psi(t + \Delta t) + \psi(t + \Delta t) e^{m\alpha\Delta x} + \psi(t) e^{-m\alpha\Delta x} - 2\psi(t) + \psi(t) e^{m\alpha\Delta x}]$$

بعد إعادة الترتيب و الاختصار نحصل على:-

$$(2 + 6r)\psi(t + \Delta t) - 3r\psi(t + \Delta t)[e^{-m\alpha\Delta x} + e^{m\alpha\Delta x}] = (2 - 6r)\psi(t) + 3r\psi(t)[e^{-m\alpha\Delta x} + e^{m\alpha\Delta x}]$$

و كذلك

$$\psi(t + \Delta t)[2 + 6r - 3re^{-m\alpha\Delta x} - 3re^{m\alpha\Delta x}] = \psi(t)[2 - 6r + 3re^{-m\alpha\Delta x} + 3re^{m\alpha\Delta x}]$$

إذ إن

$$\psi(t + \Delta t)[2 + 6r - 6r \cos(\alpha\Delta x)] = \psi(t)[2 - 6r + 6r \cos(\alpha\Delta x)]$$

من تبسيط المعادلة السابقة نحصل على:-

$$\psi(t + \Delta t)\left[2 + 6r - 6r\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)\right)\right] = \psi(t)\left[2 - 6r + 6r\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)\right)\right]$$

نعيد الترتيب للمعادلة أعلاه مع الاختصار نحصل على:-

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = \frac{2 - 12r \sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)}{2 + 12r \sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)}$$

إذن نضع

$$\xi_1 = \frac{1 - 6r \sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)}{1 + 6r \sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)} \quad (30)$$

كذلك باستخدام تقريبات الفروقات المنتهية لمعادلة (16) الخطية بالنسبة إلى  $y$  نستخدم المعادلة الآتية:-

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2(\Delta y)^2}\left[u_{i,j-1,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j+1,k}^{n+1} + u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n\right] \quad (31)$$

نفرض أن  $u_{i,j,k}^n = \psi(t)e^{m\alpha x}e^{m\beta y}e^{m\gamma z}$  و  $u_{i,j,k}^{n+1} = \psi(t + \Delta t)e^{m\alpha x}e^{m\beta y}e^{m\gamma z}$  و نعوضهما في المعادلة (31) ثم بعد ذلك نحصل على:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\psi(t + \Delta t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} - \psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2(\Delta y)^2} \left[ \psi(t + \Delta t) e^{m\alpha x} e^{m\beta(y-\Delta y)} e^{m\gamma z} - 2\psi(t + \Delta t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} + \psi(t + \Delta t) e^{m\alpha x} e^{m\beta(y+\Delta y)} e^{m\gamma z} + \psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta(y-\Delta y)} e^{m\gamma z} - 2\psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z} + \psi(t) e^{m\alpha x} e^{m\beta(y+\Delta y)} e^{m\gamma z} \right]$$

نقسم الطرفين على  $e^{m\alpha x} e^{m\beta y} e^{m\gamma z}$  ونضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$  و بعد التبسيط و الاختصار نحصل

على:-

$$2\psi(t + \Delta t) - 2\psi(t) = 3r \left[ \psi(t + \Delta t) e^{-m\beta\Delta y} - 2\psi(t + \Delta t) + \psi(t + \Delta t) e^{m\beta\Delta y} - \psi(t) e^{-m\beta\Delta y} - 2\psi(t) + \psi(t) e^{m\beta\Delta y} \right]$$

بعد إعادة الترتيب و الاختصار نحصل على:-

$$(2 + 6r)\psi(t + \Delta t) - 3r\psi(t + \Delta t) \left[ e^{-m\beta\Delta y} + e^{m\beta\Delta y} \right] = (2 - 6r)\psi(t) + 3r\psi(t) \left[ e^{-m\beta\Delta y} + e^{m\beta\Delta y} \right]$$

و كذلك

$$\psi(t + \Delta t) \left[ 2 + 6r - 3re^{-m\beta\Delta y} - 3re^{m\beta\Delta y} \right] = \psi(t) \left[ 2 - 6r + 3re^{-m\beta\Delta y} + 3re^{m\beta\Delta y} \right]$$

يكون لدينا

$$\psi(t + \Delta t) \left[ 2 + 6r - 6r \cos(\beta\Delta y) \right] = \psi(t) \left[ 2 - 6r + 6r \cos(\beta\Delta y) \right]$$

من تبسيط المعادلة السابقة نحصل على:-

$$\psi(t + \Delta t) \left[ 2 + 6r - 6r \left( 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\beta\Delta y}{2} \right) \right) \right] = \psi(t) \left[ 2 - 6r + 6r \left( 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\beta\Delta y}{2} \right) \right) \right]$$

نعيد الترتيب للمعادلة أعلاه مع الاختصار نحصل على:-

$$\frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = \frac{2 - 12r \sin^2 \left( \frac{\beta\Delta y}{2} \right)}{2 + 12r \sin^2 \left( \frac{\beta\Delta y}{2} \right)}$$

إذن نضع

$$\xi_{II} = \frac{1 - 6r \sin^2\left(\frac{\beta\Delta y}{2}\right)}{1 + 6r \sin^2\left(\frac{\beta\Delta y}{2}\right)} \quad (32)$$

بتطبيق أسلوب الإجراءات السابقة نفسه لتقريبات الفروقات المنتهية لمعادلة (17) الخطية بالنسبة إلى  $Z$  نحصل على:-

$$\xi_{III} = \frac{1 - 6r \sin^2\left(\frac{\gamma\Delta z}{2}\right)}{1 + 6r \sin^2\left(\frac{\gamma\Delta z}{2}\right)} \quad (33)$$

و هكذا وجدنا أن تلك عوامل التضخم باستخدام طريقة فون نيومان (Von-Neumann) لتحليل الاستقرار العددية للطريقة الضمنية (Crank-Nicholson) بعد تخفيض معادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ (Parabolic) ثلاثية الأبعاد إلى معادلات ذوات بعد واحد باستخدام طريقة أحادية البعد محلياً (LOD) التي هي في المعادلات (30) و (32) و (33).

الآن نثبت الاستقرار العددية كل واحدة على انفراد من استخدام شرط الاستقرار الذي يكون في الحالات  $|\xi_I| \leq 1$  ،  $|\xi_{II}| \leq 1$  ،  $|\xi_{III}| \leq 1$  نأخذ كل حالة على انفراد و نبين قيم  $r$  التي تحقق شرط الاستقرار.

نأخذ الحالة الأولى  $|\xi_I| \leq 1$  من معادلة (30) كما يأتي:-

$$\left| \frac{1 - 6r \sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)}{1 + 6r \sin^2\left(\frac{\alpha\Delta x}{2}\right)} \right| \leq 1$$

و من هنا تبين أن الحالة الأولى مستقرة بدون شروط.

و بالأسلوب نفسه نطبق الإجراءات السابقة مع الحالات  $\xi_{II}$  في المعادلة (32) و  $\xi_{III}$  في المعادلة (33) فتكون في جميع المعادلات المنشطرة تبين أن الطريقة الضمنية (C-N) للمعادلات المنشطرة باستعمال طريقة أحادية البعد محلياً (LOD) تكون مستقرة بدون شروط (Unconditionally Stable) عند تطبيقها في المعادلات التفاضلية الجزئية ثلاثية الأبعاد كما في المعادلة (1).

## Numerical Consistency

## 5. الاتساق العددي

الطرائق العددية توصف بالاتساق إذا كان حل الطرائق يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية في النهاية حيث حجم المشبك يتجه إلى الصفر يعني أن طرائق الفروقات المنتهية أو أي مؤثر يكون متسقاً إذا كان المؤثر يختزل إلى المعادلة التفاضلية الأصلية كالزيادات في المتغير المستقل التي تختفي على سبيل المثال في حالة معادلة الحرارة فان طريقة الفروقات المنتهية لها يقال عنها متسقة إذا كان حل الطريقة يحقق معادلة الحرارة أو يعيد ثانياً إلى المعادلة التفاضلية الجزئية الأصلية في النهاية عندما  $\Delta x \rightarrow 0$  و  $\Delta t \rightarrow 0$  و على وفق ذلك تعد الطريقة العددية متسقة مع المعادلة التفاضلية الجزئية إذا كان خطأ البتر المحلي يتجه إلى الصفر عندما الزمن و الخطوات المكانية تتجه إلى الصفر [7]، [9].

نستخدم توسيعات متسلسلة تايلور (Taylor) لإيجاد الاتساق للطرائق العددية كما يأتي [2]:-

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta t \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O((\Delta t)^3)$$

$$u_{i,j-1} = u_{i,j} - \Delta t \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O((\Delta t)^3)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O((\Delta x)^3)$$

## 5.1 الاتساق العددي لطرائق أحادية البعد محلياً (LOD) :-

## أولاً : الاتساق لخوارزمية الطريقة الصريحة (Explicit scheme) الاعتيادية

نختبر الاتساق لخوارزمية الطريقة الصريحة الاعتيادية للمعادلات المنشطرة و المتعاقبة بانتظام من المعادلة الأصلية (1) و الآن نأخذ المعادلة (10) التي تمثل تقريبات الفروقات المنتهية بالنسبة إلى  $x$  يمكن كتابتها بالشكل الآتي:-

$$\frac{1}{3}u_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{3}u_{i,j,k}^n + r(u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n) \quad (34)$$

حيث إن  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ ، نقسم على  $\Delta t$  و نعيد ترتيب المعادلة (34) و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

نحصل على:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} \quad (35)$$

نستبدل كل حد في المعادلة (35) بتوسيعات متسلسلة تايلور للدالة  $u(x, y, z, t)$  حول النقطة  $(x_i, y_j, z_k)$  عند الزمن  $t_n$  بالنسبة إلى  $x$  حيث إن

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2)$$

$$\frac{u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2} + O((\Delta x)^2)$$

نعوض المعادلتين أعلاه في المعادلة (35) بدون الإشارات الرمزية للحصول على المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{3}(u_t) - u_{xx} = -\frac{\Delta t}{6}u_{tt} + O((\Delta x)^2) + O((\Delta t)^2) \quad (36)$$

و كذلك باستخدام تقريبات الفروقات المنتهية من معادلة (12) بالنسبة إلى  $y$  يمكن كتابتها بالشكل الآتي:-

$$\frac{1}{3}u_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{3}u_{i,j,k}^n + r(u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n) \quad (37)$$

$$r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \quad \text{حيثُ إن}$$

نقسم على  $\Delta t$  ونعيد ترتيب المعادلة (37) و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$  نحصل على:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n}{(\Delta y)^2} \quad (38)$$

نستبدل كل حد في المعادلة (38) بتوسيعات متسلسلة تايلور للدالة  $u(x, y, z, t)$  حول النقطة  $(x_i, y_j, z_k)$  عند الزمن  $t_n$  بالنسبة إلى  $y$  وكل حد على انفراد أي إن

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2)$$

$$\frac{u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n}{\Delta y^2} = \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2} + O((\Delta y)^2)$$

نعوض المعادلتين أعلاه في المعادلة (38) بدون الإشارات الرمزية للحصول على المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{3}(u_t) - u_{yy} = -\frac{\Delta t}{6}u_{tt} + O((\Delta y)^2) + O((\Delta t)^2) \quad (39)$$

وبالأسلوب نفسه نطبق الإجراءات السابقة لتقريب الفروقات المنتهية من معادلة (14) بالنسبة إلى  $Z$  نحصل على:-

$$\frac{1}{3}(u_t) - u_{zz} = -\frac{\Delta t}{6}u_{tt} + O((\Delta z)^2) + O((\Delta t)^2) \quad (40)$$

من المعادلات (36) و (39) و (40) يتبين أن الطريقة الصريحة الاعتيادية تكون متسقة إلى المعادلة الأصلية (1) ثلاثية الأبعاد عندما  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  تتجه إلى الصفر.

و على وفق ذلك فإن خوارزمية الطريقة الصريحة الاعتيادية للمعادلة الأصلية (1) تكون متسقة و أن خطأ البتر المحلي لكل واحدة منها هو  $O((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$  و  $O((\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$  و  $O((\Delta z)^2 + (\Delta t)^2)$ .

### ثانياً : الاتساق لخوارزمية الطريقة الضمنية (Crank-Nicholson)

نختبر الاتساق لخوارزمية الطريقة الضمنية (C-N) للمعادلات المنشطرة و المتعاقبة بانتظام من المعادلة الأصلية (1) ثلاثية الأبعاد باستخدام طريقة أحادية البعد محلياً (LOD) و الآن نأخذ المعادلة (19) التي تمثل تقريبات الفروقات المنتهية بالنسبة إلى  $x$  يمكن كتابتها بالشكل الآتي:-

$$\frac{1}{3}u_{i,j,k}^{n+1} - \frac{1}{2}r(u_{i-1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i+1,j,k}^{n+1}) = \frac{1}{3}u_{i,j,k}^n + \frac{1}{2}r(u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n) \quad (41)$$

$$r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad \text{حيث أن}$$

نقسم على  $\Delta t$  و نعيد ترتيب المعادلة (41) و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  نحصل على:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} (u_{i-1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i+1,j,k}^{n+1}) + \frac{1}{2(\Delta x)^2} (u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n) \quad (42)$$

نستبدل كل حد في المعادلة (42) بتوسيعات متسلسلة تايلور للدالة  $u(x,y,z,t)$  حول النقطة  $(x_i, y_j, z_k)$  عند الزمن  $t_n$  بالنسبة إلى  $x$  كل حد على انفراد أي أن

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2)$$

$$u_{i-1,j,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i+1,j,k}^{n+1} = (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial x^2} + O((\Delta x)^4)$$

$$u_{i-1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n = (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2} + O((\Delta x)^4)$$

نعوض هذه المركبات أعلاه في المعادلة (42) فنكون النتيجة

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2) \right) = \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left( \Delta x^2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial x^2} + O((\Delta x)^4) \right) + \frac{1}{2(\Delta x)^2} \left( \Delta x^2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2} + O((\Delta x)^4) \right)$$

نبسط المعادلة أعلاه ونعيد ترتيب الحدود نحصل على:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2} + O((\Delta x)^2) \right) \quad (43)$$

من المعادلة (43) نعالج الحد  $\frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial x^2}$  من توسيعات متسلسلة تايلور (Taylor) بالنسبة إلى  $u_{i,j,k}^{n+1}$  حول النقطة  $(x_i, y_j, z_k)$  عند الزمن  $t_n$  على النحو الآتي:-

$$u_{i,j,k}^{n+1} = u_{i,j,k}^n + \Delta t \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^3)$$

نأخذ المشتقة للرتبة الثانية بالنسبة إلى  $x$  للطرفين ينتج لنا

$$\frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2} + \Delta t \frac{\partial^3 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2 \partial t} + O((\Delta t)^2)$$

نعوض عن  $\frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial x^2}$  عما يساويها في المعادلة (43) فنصبح بالشكل الآتي:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2} + \Delta t \frac{\partial^3 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2 \partial t} + O((\Delta t)^2) + \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2} + O((\Delta x)^2) \right)$$

نجمع الحدود المتشابهة ينتج لنا

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2) \right) = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2} + \Delta t \frac{\partial^3 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2 \partial t} + O((\Delta x)^2) + O((\Delta t)^2) \right) \quad (44)$$

نبسط ونعيد ترتيب المعادلة (44) على النحو الآتي:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2} = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^3 u_{i,j,k}^n}{\partial x^2 \partial t} \right) - \frac{\Delta t}{6} \left( \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} \right) + O((\Delta x)^2) + O((\Delta t)^2)$$

نكتب المعادلة أعلاه بدون الإشارات الرمزية

$$\frac{1}{3} (u_t) - u_{xx} = \frac{\Delta t}{2} (u_{txx}) - \frac{\Delta t}{6} (u_{tt}) + O((\Delta x)^2) + O((\Delta t)^2) \quad (45)$$

و كذلك باستخدام تقريبات الفروقات المنتهية من معادلة (21) بالنسبة إلى  $y$  يمكن كتابتها بالشكل الآتي:-

$$\frac{1}{3} u_{i,j,k}^{n+1} - \frac{1}{2} r (u_{i,j-1,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j+1,k}^{n+1}) = \frac{1}{3} u_{i,j,k}^n + \frac{1}{2} r (u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n) \quad (46)$$

$$\text{حيث إن } r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$$

نقسم على  $\Delta t$  و نعيد ترتيب المعادلة (46) و نضع  $r = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$  نحصل على

$$\frac{1}{3} \left( \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta x} \right) = \frac{1}{2(\Delta y)^2} (u_{i,j-1,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j+1,k}^{n+1}) \quad (47)$$

$$+ \frac{1}{2(\Delta y)^2} (u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n)$$

نستبدل كل حد في المعادلة (47) بتوسيعات متسلسلة تايلور للدالة  $u(x, y, z, t)$  حول النقطة  $(x_i, y_j, z_k)$  عند الزمن  $t_n$  بالنسبة إلى  $y$  كل حد على انفراد أي أن

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2)$$

$$u_{i,j-1,k}^{n+1} - 2u_{i,j,k}^{n+1} + u_{i,j+1,k}^{n+1} = \Delta y^2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial y^2} + O((\Delta y)^4)$$

$$u_{i,j-1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j+1,k}^n = \Delta y^2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2} + O((\Delta y)^4)$$

نعوض هذه المركبات أعلاه في المعادلة (47) فنكون النتيجة

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2) \right) = \frac{1}{2(\Delta y)^2} \left( \Delta y^2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial y^2} + O((\Delta y)^4) \right) + \frac{1}{2(\Delta y)^2} \left( \Delta y^2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2} + O((\Delta y)^4) \right)$$

نبسط المعادلة أعلاه و نعيد ترتيب الحدود

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2} + O((\Delta y)^2) \right) \quad (48)$$

من معادلة (48) نعالج الحد  $\frac{\partial^2 u_{i,j,k}^{n+1}}{\partial y^2}$  من توسيعات متسلسلة تايلور كما ذكر سابقاً بالنسبة إلى

$y$  و نعوض عنها عما يساويها في المعادلة (48) تصبح بالشكل الآتي:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2} + \Delta t \frac{\partial^3 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2 \partial t} + O(\Delta t^2) + \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\Delta y^2} + O((\Delta y)^2) \right)$$

نجمع الحدود المتشابهة ينتج لنا

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2) \right) = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2} + \Delta t \frac{\partial^3 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2 \partial t} + O((\Delta y)^2) + O((\Delta t)^2) \right) \quad (49)$$

نبسط و نعيد ترتيب المعادلة (49) على النحو الآتي:-

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial u_{i,j,k}^n}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2} = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^3 u_{i,j,k}^n}{\partial y^2 \partial t} \right) - \frac{\Delta t}{6} \left( \frac{\partial^2 u_{i,j,k}^n}{\partial t^2} \right) + O((\Delta y)^2) + O((\Delta t)^2)$$

نكتب المعادلة أعلاه بدون الإشارات الرمزية

$$\frac{1}{3}(u_t) - u_{yy} = \frac{\Delta t}{2}(u_{yyt}) - \frac{\Delta t}{6}(u_{tt}) + O((\Delta y)^2) + O(\Delta t^2) \quad (50)$$

و بالأسلوب نفسه نطبق الإجراءات السابقة لتقريبات الفروقات المنتهية من معادلة (23) بالنسبة إلى  $z$  نحصل على:-

$$\frac{1}{3}(u_t) - u_{zz} = \frac{\Delta t}{2}(u_{zzt}) - \frac{\Delta t}{6}(u_{tt}) + O((\Delta z)^2) + O((\Delta t)^2) \quad (51)$$

من المعادلات (45) و (50) و (51) يتبين أن الطريقة الضمنية (C-N) تكون متسقة إلى المعادلة الأصلية (1) ثلاثية الأبعاد عندما  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  تتجه إلى الصفر.

و على وفق ذلك فإن خوارزمية الطريقة الضمنية (Crank-Nicholson) للمعادلة الأصلية (1) تكون متسقة و أن خطأ البتر المحلي لكل واحدة منها هو  $O((\Delta x)^2 + (\Delta t)^2)$  و  $O((\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$  و  $O((\Delta z)^2 + (\Delta t)^2)$ .

## Numerical Convergence

### 6. التقارب العددي

لتكن  $U$  تمثل الحل المضبوط لمعادلة تفاضلية جزئية بالمتغيرات المستقلة  $x$  و  $t$  و  $U$

الحل المضبوط للمعادلات الفرقية تُستخدم لتقريب المعادلة التفاضلية الجزئية ثم بعد ذلك معادلة

الفروقات المنتهية يقال أنها تكون متقاربة عندما  $U \rightarrow U$  في نقطة ثابتة أو على طول مستوى  $t$  الثابت بينما  $h \rightarrow 0$  و  $k \rightarrow 0$  [9].

### مبرهنة Lax Equivalence :

معطى مسألة متمثلة بشكل ملائم خطية لقيم ابتدائية و تقريبات الفروقات المنتهية لها التي تحقق شروط الاتساق و الاستقرار هي شروط ضرورية و كافية للتقارب .

البرهان : [1].

بما إن طرائق أحادية البعد محلياً LOD هما:-

(1) الطريقة الصريحة (Explicit Method)

(2) الطريقة الضمنية (Crank Nicholson Method)

تكون طرائق مستقرة (stable) و متسقة (consistence) فإن باستخدام مبرهنة (Lax Equivalence) نستنتج أن الطرائق متقاربة (convergent).

### Numerical Results

### 7. النتائج العددية

#### مثال (1) [5]:

نعتبر مسألة القيم الحدودية و الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (0 \leq x, y, z \leq 1; t \geq 0) \quad (52)$$

$$u(x, y, z, 0) = \sin(x + y + z), \quad (0 \leq x, y, z \leq 1) \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, y, z, t) &= e^{-3t} \sin(y + z), & (0 \leq y, z \leq 1; t \geq 0) \\ u(1, y, z, t) &= e^{-3t} \sin(1 + y + z), \\ u(x, 0, z, t) &= e^{-3t} \sin(x + z), & (0 \leq x, z \leq 1; t \geq 0) \\ u(x, 1, z, t) &= e^{-3t} \sin(x + 1 + z), \\ u(x, y, 0, t) &= e^{-3t} \sin(x + y), & (0 \leq x, y \leq 1; t \geq 0) \\ u(x, y, 1, t) &= e^{-3t} \sin(x + y + 1), \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

و نأخذ قيم المعلمات بالنسبة إلى خطوات الطول  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{10}$  و خطوة الزمن  $\Delta t = r(\Delta x)^2$  حيث أن  $r = \frac{1}{8}$  و من اجل مقارنة النتائج العددية نستخدم الحل المضبوط للمعادلة (52)  $u(x, y, z, t) = e^{-3t} \sin(x + y + z)$  حيث أن  $0 \leq x, y, z \leq 1$  و  $t \geq 0$ .

### مثال (2) [11]:

نأخذ مسألة القيم الحدودية و الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (0 \leq x, y, z \leq \pi; t \geq 0) \quad (55)$$

$$u(x, y, z, 0) = 2 \sin x \sin y \sin z, \quad (0 \leq x, y, z \leq \pi) \quad (56)$$

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) = u(\pi, y, z, t) = 0, \\ u(x, 0, z, t) = u(x, \pi, z, t) = 0, \\ u(x, y, 0, t) = u(x, y, \pi, t) = 0, \end{aligned} \quad (0 \leq x, y, z \leq \pi; t \geq 0) \quad (57)$$

و نأخذ قيم المعلمات بالنسبة إلى خطوات الطول  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\pi}{10}$  و خطوة الزمن  $\Delta t = r(\Delta x)^2$  حيث أن  $r = \frac{1}{8}$  و من اجل مقارنة النتائج العددية نستخدم الحل المضبوط للمعادلة (55)  $u(x, y, z, t) = 2e^{-3t} \sin x \sin y \sin z$  حيث أن  $0 \leq x, y, z \leq \pi$  و  $t \geq 0$ .

نعطي مقارنة للنتائج كما في الجدول (1) بالنسبة إلى المثال (1) يحتوي النتائج العددية لمعادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ في ثلاثة أبعاد باستخدام طرائق أحادية البعد محلياً (LOD) وهما الطريقة الصريحة الاعتيادية و الطريقة الضمنية (C-N) عند حجم خطوة الطول  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{10}$  و حجم خطوة الزمن  $\Delta t = r(\Delta x)^2$  حيث إن  $r = \frac{1}{8}$ ، نقدم شكل (3) للمقارنة كذلك بين قيم النتائج العددية للطرائق مع الحل المضبوط.

و الجدول (2) بالنسبة إلى المثال (1) يحتوي على مقارنة الخطأ النسبي للطريقة الصريحة الاعتيادية مع الحل المضبوط و الطريقة الضمنية (C-N) مع الحل المضبوط لمعادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ في ثلاثة أبعاد عند حجم خطوة الطول  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{10}$  و حجم خطوة الزمن  $\Delta t = r(\Delta x)^2$  حيث إن  $r = \frac{1}{8}$ .

و الجدول (3) بالنسبة إلى المثال (2) يحتوي على النتائج العددية لمعادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ في ثلاثة أبعاد باستخدام طرائق أحادية البعد محلياً (LOD) وهما الطريقة

الصريحة الاعتيادية و الطريقة الضمنية (C-N) عند حجم خطوة الطول  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\pi}{10}$  و حجم خطوة الزمن  $\Delta t = r(\Delta x)^2$  حيثُ إن  $r = \frac{1}{8}$ ، نقدم شكل (4) للمقارنة كذلك بين قيم النتائج العددية للطريقة مع الحل المضبوط.

و الجدول (4) بالنسبة إلى المثال (2) يحتوي مقارنة الخطأ النسبي للطريقة الصريحة الاعتيادية مع الحل المضبوط و الطريقة الضمنية (C-N) مع الحل المضبوط لمعادلة الحرارة من نوع القطع المكافئ في ثلاثة أبعاد عند حجم خطوة الطول  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\pi}{10}$  و حجم خطوة الزمن  $\Delta t = r(\Delta x)^2$  حيثُ إن  $r = \frac{1}{8}$ .

الجدول (1)

<i>Point (i,j,k,n)</i>	<i>Exact Solution</i>	<i>Explicit Method</i>	<i>Crank–Nicholson Method</i>
(3,1,8,1)	0.783326909627483	0.783326909627483	0.783326909627483
(4,7,6,1)	0.985449729988460	0.985449729988460	0.985449729988460
(2,2,2,2)	0.294414081167900	0.294412929079227	0.294414913792286
(2,2,3,2)	0.387960758203297	0.387959240051741	0.387961879392759
(2,2,2,3)	0.293312095877329	0.293310090771896	0.293313625141587
(2,2,3,3)	0.386508629802498	0.386506036903373	0.386510723094027
(2,2,2,4)	0.292214235292940	0.292211456186610	0.292216385687648
(10,10,10,4)	0.422598800579597	0.422594937743391	0.422601770246045
(2,2,2,5)	0.291120483976050	0.291116995690319	0.291123206786436
(10,10,10,5)	0.421017022764473	0.421012234421763	0.421020742157001
(2,2,2,6)	0.290030826545764	0.290026669602081	0.290034086915908
(10,10,10,6)	0.419441165508169	0.419435517948653	0.419445577517284
(2,2,2,7)	0.288945247678755	0.288940455072307	0.288949018793983
(2,2,3,7)	0.380754265978061	0.380748288644746	0.380759549978788
(2,2,2,8)	0.287863732109054	0.287858329683656	0.287867992193231
(10,10,10,8)	0.416307124112895	0.416299906904842	0.416312799457105
(2,2,2,9)	0.286786264627829	0.286780274290011	0.286790995208276
(10,10,10,9)	0.414748895901416	0.414740949587137	0.414755156290399
(2,2,2,10)	0.285712830083177	0.285706270516857	0.285718014899476
(2,2,3,10)	0.376494784990482	0.376486735802050	0.376502081241195
(2,2,2,11)	0.284643413379906	0.284636301547576	0.284649037659017
(10,10,10,11)	0.411649914887418	0.411640595668479	0.411657272474953

الجدول (2)

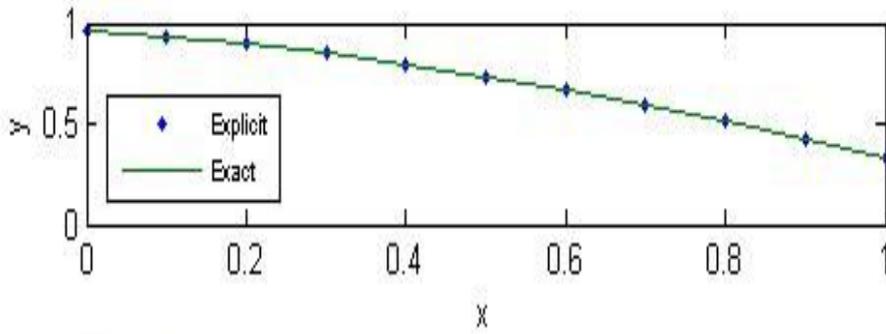
<i>Point (i,j,k,n)</i>	<i>Explicit Method With Exact Solution</i>	<i>Crank–Nicholson Method With Exact Solution</i>
(3,1,8,1)	0	0
(4,7,6,1)	0	0
(2,2,2,2)	3.913157512531533e-006	2.828072564297916e-006
(2,2,3,2)	3.913157512371383e-006	2.889955847935104e-006
(2,2,2,3)	6.836081639224017e-006	5.213778358158788e-006
(2,2,3,3)	6.708515478425922e-006	5.415898552342855e-006
(2,2,2,4)	9.510509737450632e-006	7.358966293191799e-006
(10,10,10,4)	9.140670065253538e-006	7.027153042894741e-006
(2,2,2,5)	1.198227511763106e-005	9.352864316111290e-006
(10,10,10,5)	1.137327578363488e-005	8.834304379562950e-006
(2,2,2,6)	1.433276501044287e-005	1.124146071959880e-005
(10,10,10,6)	1.346448555870005e-005	1.051877945632588e-005
(2,2,2,7)	1.658655570997634e-005	1.305131424916112e-005
(2,2,3,7)	1.569866407044139e-005	1.387771904116444e-005
(2,2,2,8)	1.876730131441378e-005	1.479896111198372e-005
(10,10,10,8)	1.733625882083583e-005	1.363258969488254e-005
(2,2,2,9)	2.088781283008395e-005	1.649514300389191e-005
(10,10,10,9)	1.915933799395447e-005	1.509440783212508e-005
(2,2,2,10)	2.295859908565800e-005	1.814694950038263e-005
(2,2,3,10)	2.137928266931812e-005	1.937942039050256e-005
(2,2,2,11)	2.498505848163531e-005	1.975903480150925e-005
(10,10,10,11)	2.263870002723787e-005	1.787340958684520e-005

الجدول (3)

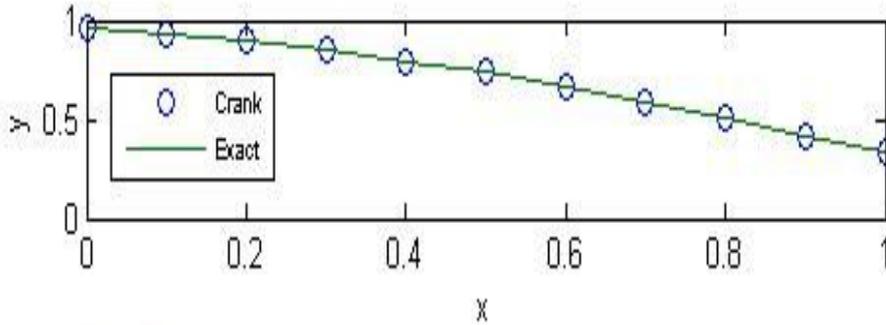
<i>Point (i,j,k,n)</i>	<i>Exact Solution</i>	<i>Explicit Method</i>	<i>Crank–Nicholson Method</i>
(2,3,4,1)	0.293892626146237	0.293892626146237	0.293892626146237
(4,5,6,1)	1.538841768587627	1.538841768587627	1.538841768587627
(2,10,2,2)	0.056872642518016	0.056850621398073	0.056889665971712
(10,10,10,2)	0.056872642518016	0.056850621398073	0.056889665971712
(10,2,2,3)	0.054806204572748	0.054763770801568	0.054839019313848
(10,10,10,3)	0.054806204572748	0.054763770801568	0.054839019313848
(2,2,2,4)	0.052814849577604	0.052753523508686	0.052862290328791
(2,2,10,4)	0.052814849577604	0.052753523508686	0.052862290328791
(2,10,2,5)	0.050895849432566	0.050817067595020	0.050956814577823
(2,10,10,5)	0.050895849432566	0.050817067595020	0.050956814577823
(10,2,2,6)	0.049046575161710	0.048951694355197	0.049120023664665
(10,10,10,6)	0.049046575161710	0.048951694355197	0.049120023664665
(10,10,2,7)	0.047264493311592	0.047154794513948	0.047349441773532
(2,2,10,7)	0.047264493311592	0.047154794513948	0.047349441773532
(2,10,2,8)	0.045547162480481	0.045423854576274	0.045642682331968
(10,10,10,8)	0.045547162480481	0.045423854576274	0.045642682331968
(10,10,2,9)	0.043892229973711	0.043756453311575	0.043997444793985
(10,2,10,9)	0.043892229973711	0.043756453311575	0.043997444793985
(2,2,2,10)	0.042297428580556	0.042150258366847	0.042411511539143
(2,10,10,10)	0.042297428580556	0.042150258366847	0.042411511539143
(10,2,2,11)	0.040760573468216	0.040603023004198	0.040882744883421
(10,10,10,11)	0.040760573468216	0.040603023004198	0.040882744883421

الجدول (4)

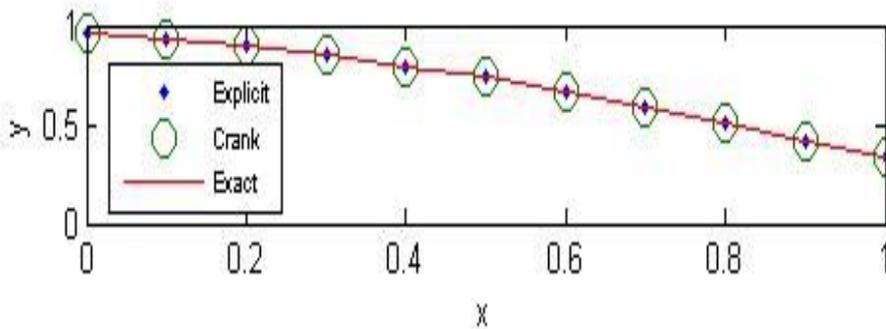
<i>Point (i,j,k,n)</i>	<i>Explicit Method With Exact Solution</i>	<i>Crank–Nicholson Method With Exact Solution</i>
(2,3,4,1)	0	0
(4,5,6,1)	0	0
(2,10,2,2)	3.872005760314458e-004	2.993258787066022e-004
(10,10,10,2)	3.872005760315675e-004	2.993258787063580e-004
(10,2,2,3)	7.742512277769734e-004	5.987413533946671e-004
(10,10,10,3)	7.742512277769728e-004	5.987413533945402e-004
(2,2,2,4)	1.161152013286814e-003	8.982464508828995e-004
(2,2,10,4)	1.161152013286814e-003	8.982464508828992e-004
(2,10,2,5)	1.547902990589654e-003	1.197841197997803e-003
(2,10,10,5)	1.547902990589654e-003	1.197841197997529e-003
(10,2,2,6)	1.934504217691665e-003	1.497525621573061e-003
(10,10,10,6)	1.934504217691946e-003	1.497525621572353e-003
(10,10,2,7)	2.320955752575703e-003	1.797299748451954e-003
(2,2,10,7)	2.320955752575557e-003	1.797299748452248e-003
(2,10,2,8)	2.707257653202844e-003	2.097163605485113e-003
(10,10,10,8)	2.707257653202995e-003	2.097163605484806e-003
(10,10,2,9)	3.093409977511473e-003	2.397117219530390e-003
(10,2,10,9)	3.093409977511630e-003	2.397117219530232e-003
(2,2,2,10)	3.479412783417568e-003	2.697160617455030e-003
(2,10,10,10)	3.479412783417729e-003	2.697160617454863e-003
(10,2,2,11)	3.865266128814982e-003	2.997293826133672e-003
(10,10,10,11)	3.865266128815320e-003	2.997293826132988e-003



3a



3b



3c

الشكل (3a)

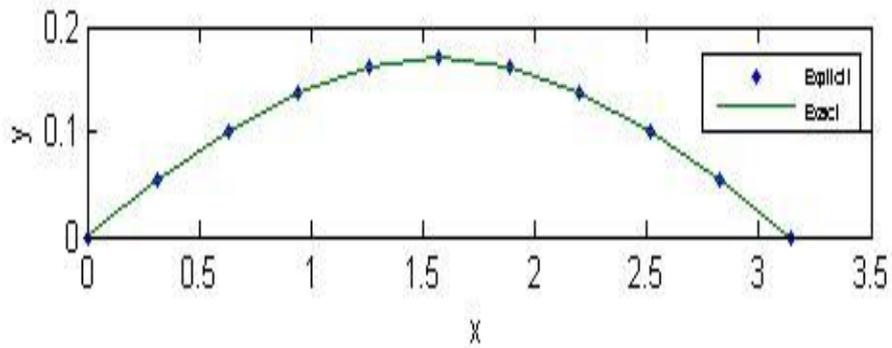
يوضح مقارنة الحل العددي بين الطريقة الصريحة (Explicit scheme) الاعتيادية و مع الحل المضبوط.

الشكل (3b)

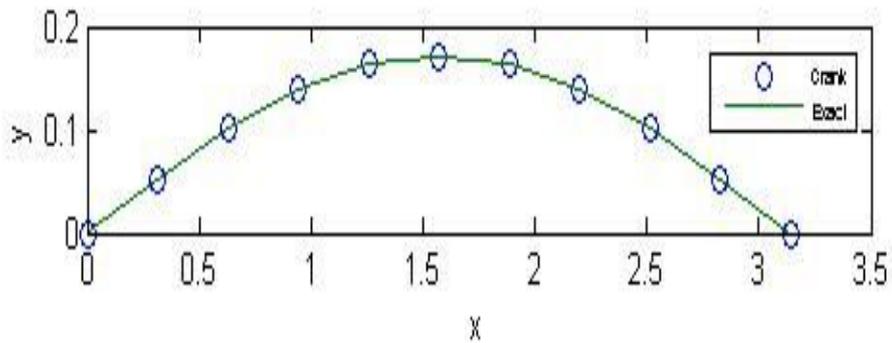
يوضح مقارنة الحل العددي بين الطريقة الضمنية (Crank-Nicholson) و مع الحل المضبوط.

الشكل (3c)

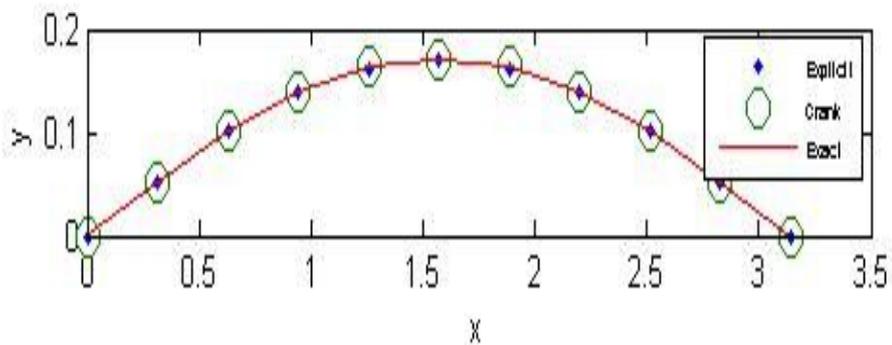
يوضح مقارنة الحل العددي بين الطريقتين أعلاه و مع الحل المضبوط بالنسبة للمثال (1) و كل الأشكال من قيم  $u(10, :, 10, 5)$  المأخوذة من المكعب  $n=5$  و الشريحة  $k=10$  و السطر  $i=10$  و لكل الأعمدة  $j$  عندما يكون حجم خطوة الطول  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{1}{10}$  و نأخذ  $r = \frac{1}{8}$  و حجم خطوة الزمن  $\Delta t = r(\Delta x)^2$ .



4a



4b



4c

الشكل (4a)

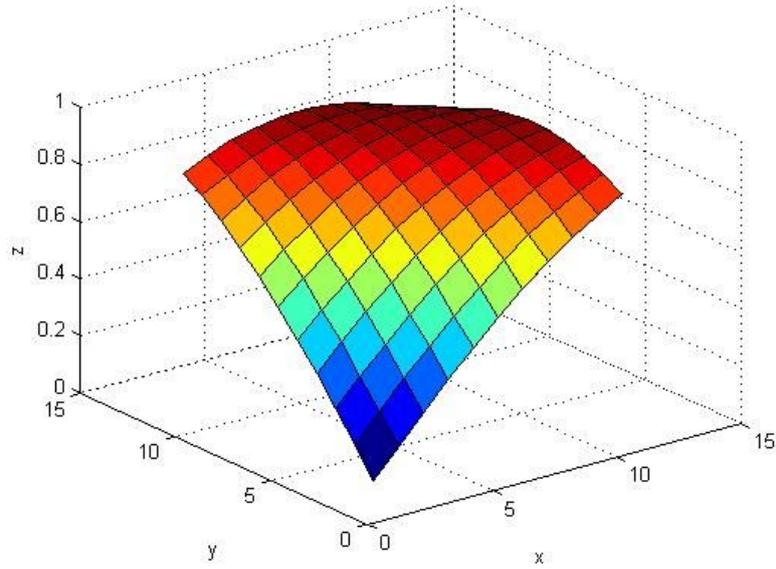
يوضح مقارنة الحل العددي بين الطريقة الصريحة (Explicit scheme) الاعتيادية و مع الحل المضبوط.

الشكل (4b)

يوضح مقارنة الحل العددي بين الطريقة الضمنية (Crank-Nicholson) و مع الحل المضبوط.

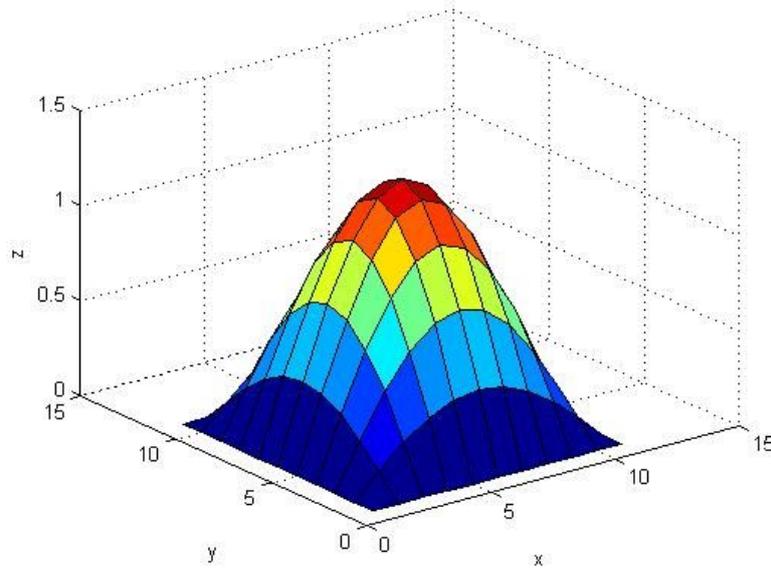
الشكل (4c)

يوضح الحل العددي بين الطريقتين أعلاه و مع الحل المضبوط بالنسبة للمثال (2) و كل الأشكال من قيم  $u(2, :, 10, 4)$  المأخوذة من المكعب  $n=4$  و الشريحة  $k=10$  و السطر  $i=2$  و لكل الأعمدة  $j$  عندما يكون حجم خطوة الطول  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \frac{\pi}{10}$  و نأخذ  $r = \frac{1}{8}$  و حجم خطوة الزمن  $\Delta t = r(\Delta x)^2$ .



الشكل (5)

بالنسبة للمثال الأول يوضح الحل العددي في ثلاثة أبعاد لطرائق أحادية البعد محلياً (LOD) العددية التي تكون من قيم  $u(:, :, 2, 8)$  المأخوذة من المكعب  $n=8$  و الشريحة  $k=2$  و لكل الأسطر  $i$  و لكل الأعمدة  $j$ .



الشكل (6)

بالنسبة للمثال الثاني يوضح الحل العددي في ثلاثة أبعاد لطرائق أحادية البعد محلياً (LOD) العددية التي تكون من قيم  $u(4,6)$  المأخوذة من المكعب  $n=6$  و الشريحة  $k=4$  و لكل الأسطر  $i$  و لكل الأعمدة  $j$ .

## Conclusion

## 8. الاستنتاج

خلال دراستنا الإستقرارية العددية لطرائق أحادية البعد محلياً (LOD)، نلاحظ أن الطريقة الضمنية (C-N) مستقرة بدون شروط على عكس الطريقة الصريحة الاعتيادية التي تكون مستقرة بشروط للمعادلات المنشطرة أحادية البعد المتعاقبة بانتظام الذين هم من معادلة ثلاثية الأبعاد و نلاحظ النتائج العددية كذلك الطريقة الضمنية أفضل من الطريقة الصريحة الاعتيادية و اقرب إلى الحل المضبوط مقارنة مع الطريقة الصريحة الاعتيادية، الطريقتان كلاهما متسقتان و متقاربتان.

## المصادر

- [1] Fletcher, C.A.J., (1991), "Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Fundamental and General Techniques", Springer-Verlag Berlin Heidelberg Printer in Germany.
- [2] Lambert, J.D., (1991), "Computational Methods in Ordinary Differential Equations", John Wiley and Sons.

- [3] Lapidus, L. and Pinder, G.F., (1999), "**Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering**", John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Mathews, J.H. and Fink, K.D., (2004), "**Numerical Methods Using Matlab**", Fourth Edition, Pearson Education, Inc.
- [5] Mingshu, M. and Tongke, W., (2000), "**A family of High Order Accuracy Explicit Difference Schemes with Branching Stability for Solving 3-D Parabolic Partial Differential Equation**", J. Applied Mathematics and Mechanics, University Shanghai China, Vol. 21, No. 10, pp. 1207–1212.
- [6] Noye, B.J. and Hayman, K.J., (1994), "**New LOD and ADI Methods for the Two-Dimensional Diffusion Equation**", J. Computer Mathematics, Vol. 51, pp. 215–228.
- [7] Pinchover, Y. and Rubinstein, J., (2005), "**An Introduction to Partial Differential Equations**", Cambridge University Press.
- [8] Qin, J. and Wang, T., (2009), "**A compact Locally One-Dimensional Finite Differential Equations**", John Wiley & Sons, Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng. Vol. 27, pp. 128–142.
- [9] Smith, G.D., (1978), "**Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods**", Oxford University Press.
- [10] Tveito, A. and Winther, R., (1998), "**Introduction to Partial Differential Equations : A computational Approach**", Springer-Verlag New York, Inc.
- [11] Wazwaz, A.M., (2009), "**Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory**", Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [12] Yanenko, N.N., (1971), "**the Method of Fractional Steps**", Springer-Verlag, Berlin.