المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (17) 2010
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات -الاحصاء والمعلوماتية
ص ص [129- 146]

تقدير بيز للنموذج الخطي العشوائي ثنائي التقسيم بوجود التفاعل

محمد نذير إسماعيل قاسم* نجلاء صديق يحيى ابليش**

الملخص

في هذا البحث تتم دراسة تقدير معلمات النموذج الخطي العشوائي ثنائي التقسيم مع وجود التفاعل ، المحتوي على أربع معلمات والتي تمثل σ_1^2 مركبة تباين تأثير العامل A وσ_2^2 مركبة تباين تأثير العامل B و σ_3^2 مركبة تباين تأثير التفاعل وهو العامل AB وσ_4^2 مركبة تباين تأثير الخطأ العشوائي تم تقدير هذه المعلمات باستخدام مقدر بيز غير المتحيز ألتربيعي (BAQUE) Bayes Quadratic Unbiased Estimator بعد افتراض ان المعلومات الأولية هي المعلومات المحصل عليها باستخدام أسلوب تحليل التباين لتمثل معلومات أولية لهذه المعلمات ومن ثم الحصول على التوزيع الاحتمالي الاولي الذي افترضناه بوصفه توزيعاً منتظماً .

تم تطبيق (BAQUE) على بيانات حقيقية تم الحصول عليها من جامعة الموصل / كلية الزراعة والغابات / قسم المحاصيل الزراعية . وهذه البيانات تمثل تطوير زراعة الذرة الصفراء بحيث يمثل التطوير ثلاثة عوامل هي : عامل صنف الذرة الصفراء وعامل نسبة السماد النتروجيني والعامل الثالث هو التفاعل . تم سحب عينة عشوائية من هذه البيانات من اجل الحصول على النموذج الخطي العشوائي . وكانت نتائج التقدير مشجعة جداً .

On Bayesian Estimation of Random Two-way Classification Model with Interaction

ABSTRACT

This research deals with the estimation of linear random two-way classification model with interaction, containing four parameters. These are: σ_1^2 variance of effect A, σ_2^2 variance of effect σ_3^2 variance of interaction AB and σ_4^2 variance of random error. These parameters are estimated through using Bayes Quadratic Unbiased Estimator (BAQUE). The prior information obtained by using variance analysis technique to represent prior estimates of these parameters. Then, the prior distribution is considered as a uniform distribution.

---

* أستاذ مساعد ، رئيس قسم الرياضيات / كلية التربية / جامعة الموصل E-Mail: mnqassim@yahoo.com
** مدرس مساعد / قسم الرياضيات / كلية التربية / جامعة الموصل

تاريخ التسلم :2009/7/1 ---------- تاريخ القبول : 6 /12 /2009

BAQUE approach is applied to real data obtained from Mosul University/ College of Agriculture and Forestry / Department of Crops, and these data represent the development of planting yellow corn that the development has three factors which are the corn type, the quantity of nitrogen fertilizer and the interaction between them. Then a random sample was taken from these data to get the random model. The results of estimates that have been obtained are very encouraging.

1- مقدمة :

يتناول هذا البحث مقدرات معلمات مركبات التباين في النموذج العشوائي ثنائي التقسيم مع وجود التفاعل وهذه المعلمات تعتبر متغيرات عشوائية لهـا توزيعـات طبيعيـة حـسب الافتراض الذي نفترضه بطريقة مقدر بيز غير المتحيز ألتربيعي وقد حصلنا بهـذه الطريقـة على مقدرات جيدة بعد اعتماد القيم الابتدائية لهذه المعلمات من تقديرات القيم المتوقعـة فـي جدول تحليل التباين.

وتشير المراجع والبحوث العلمية إلى إن مسألة تقدير معلمات مركبات التبـاين هـي مسألة حديثة وقديمة وما زالت البحوث مستمرة في هذا المجال انظر على سـبيل المثـال لا الحصر .

Zeger and karim (1991), Besag and Green (1993), Gui, *et. al* (1995), Chaturvedi (1996), Mistal (1997), Taraldsen and Lindqvist (2007).

ولا شك في إن هذه الدراسات في تزايد وتطور مستمرين وكان للباحثين في جامعـة الموصل دور في دراسة مركبات التباين في النماذج الخطيـة ذوات التـأثيرات العـشوائية . انظر، سالم (1997) ، فتحي (1998) ، قاسـم ، عبـاس (2001) ، إسـماعيل (2005) ، وإبراهيم (2007) وفتحي (2006) ، إذ تم الحصول من دراسة سابقة على مقدر بيـز غيـر المتحيز التربيعي للنماذج الخطية احادية التقسيم والنماذج الخطيـة فـي الإحـصاء المكـاني والنماذج الهرمية الحركية في الانحدار بعد افتراض توافر المعلومات الأولية عـن المعلمـات التي تشمل توزيعاً احتمالياً أوليا لهذه المعلمات .

ويعتمد مقدر بيز غير المتحيز التربيعي على تقدير الدالة الخطية لمركبات (لمعلمات) التباين ويتميز هذا الأسلوب من وجهة نظر بيز بسهولة التطبيق العملي للنموذج الخطي العـام من دون اية عمليات حـول الحـصول علـى التوزيـع الاحتمـالي اللاحـق Posterior Distribution.

وهو يعتمد فقط على العزمين الاول والثاني للتوزيعات الاحتمالية الاولية ، التي تعتبر معلومات اولية للمعلمات أي مركبات التباين .

ويتضمن الجانب التطبيقي الذي يشمل البيانات واللنموذج الخطي العشوائي وتحليل البيانات باسلوب تحليل التباين ومن جدول تحليل التباين حصلنا على القيم الابتدائية للمعلمات تم تطبيق اسلوب مقدر بيز غير المتحيز التربيعي .

ونعتبر النموذج الخطي الذي يتمثل بالمعادلة الرياضية الاتية :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk} \qquad \ldots\ldots.(1)$$

حيث ان : $i = 1,2,\ldots,a \qquad j = 1,2,\ldots,b \qquad k = 1,2,\ldots,n$

حيث ان a عدد مستويات العامل الاول و b عدد مستويات العامل الثاني وn عدد التكررات لكل من التوافقات للعامل الاول والثاني .

حيث ان :

μ : الوسط العام للمشاهدات .

α_i : تأثير عشوائي للصف i

β_j : تأثير عشوائي للعمود j

γ_{ij} : تأثير عشوائي للتفاعل بين الصف i والعمود j .

y_{ijk} : المشاهدة k في الصف i والعمود j .

e_{ijk} : الخطأ العشوائي للمشاهدة y_{ijk}

ونفترض ان α_i و β_j و γ_{ij} و e_{ijk} متغيرات عشوائية مستقلة وتتوزع توزيعاً طبيعياً بتوقع صفر وتباين $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2$ على التوالي .

وتسمى $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2$ مركبات التباين للمشاهدة y_{ijk} حيث ان

$$Var(y_{ijk}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2$$

هدفنا تقدير هذه المعلمات باستخدام اسلوب مقدر بيز غير المتحيز التربيعي (BAQUE).

2- مقدر بيز غير المتحيز التربيعي :

Bayes Quadratic Unbiased Estimator (BAQUE)

يمكن إعادة كتابة النموذج (1) بصيغة المصفوفات وكما موضح في الشكل الآتي :

$$Y = F\mu + ZU + e \qquad \ldots\ldots.(2)$$

اذ ان :

Y : متجهة المشاهدات ذات بعد $N \times 1$. حيث N=abn

μ : الوسط العام وهي قيمة غير اتجاهية scalar .

F : متجه ذو بعد N من الواحدات .

Z_i : مصفوفة تصميم ذات بعد $N \times q_i$ معلومة ، ولها الشكل الاتي :

$$Z_i = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_r)'$$

U : متجه ذو بعد $q_i x1$ من التأثيرات العشوائية ، اذ أن :

$$U = (U_1, U_2, \ldots, U_r)'$$

e : متجه ذو بعد $N \times 1$ من الأخطاء العشوائية

ان الفروض الأساسية على النموذج (2)

$$e \sim N(0, \sigma_e^2 I_N)$$
$$U \sim N(0,\ diag\ (\sigma_1^2 Iq_1, \sigma_2^2 Iq_2, \sigma_3^2 Iq_3, ..., \sigma_r^2 Iq_r)) \qquad ....(3)$$
$$Cov(U, e) = 0$$

ووفق هذه الفروض يكون لدينا

$$Y \sim N(F\mu, V)$$
$$Y = (y_1, y_2, ..., y_N)'$$
$$Var(y) = V = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2 Z_i Z_i' + \sigma_e^2 I_N \qquad ....(4)$$
$$= \sum_{i=1}^{r+1} \sigma_i^2 Z_i Z_i'$$

اذ أن :

$$\sigma_4^2 = \sigma_e^2$$
$$Z_4 Z_4' = I_N$$

(3) المعلمات $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_{r+1}^2$ تدعى مركبات التباين Variance Components.

3- كيفية التعبير عن المصفوفات Z

إن المصفوفات Z في النموذج (2) معلومة ، ويمكن كتابه النموذج (1) في المصفوفات وكما يأتي :

$$Y = F\mu + Z_1 U_1 + Z_2 U_2 + Z_3 U_3 + e \qquad ....(5)$$

أنظر Searle and Casella (1992)

إذ أن $F = (1,1,...,1)'$ متجه بسعة N , من الواحدات وأن المشاهدات تكتب بشكل متجه صفاً صفاً:

U_1 : متجه التأثير العشوائي للصفوف .

U_2 : متجه التأثير العشوائي للاعمدة .

U_3 : متجه التأثير العشوائي للتفاعل .

تحسب المصفوفات Z_i بواسطة حاصل كرونيكر وكما ياتي :

$$Z_1 = I_a \otimes 1_b \otimes 1_n$$
$$Z_2 = 1_a \otimes I_b \otimes 1_n$$
$$Z_3 = I_a \otimes I_b \otimes 1_n$$
$$Z_4 = I_a \otimes I_b \otimes I_n$$

و $\otimes$ ترمز حاصل كروينكر .

ليس هدفنا في هذا البحث تقدير المعلمة μ الموجودة في النموذج (5) ، اذ انه من الممكن التخاص منها وذلك بضرب (5) في مصفوفة الاسقاط M التي لها الصيغة الاتية:

$$M = I - F(F'F)^{-1}F'$$
$$MY = MF\mu + MZ_1U_1 + MZ_2U_2 + MZ_3U_3 + Me \qquad \ldots\ldots(6)$$

وبما أن $MF = 0$ حسب خاصية مصفوفة الاسقاط M

يكون لدينا :

$$MY = MZ_1U_1 + MZ_2U_2 + MZ_3U_3 + Me$$

نفرض أن $MY = X$

وعليه فإن النموذج الخطي العام يكون على النحو الآتي :

$$X = MZ_1U_1 + MZ_2U_2 + MZ_3U_3 + Me \qquad \ldots\ldots(7)$$
$$\mathrm{E}(X) = 0, \mathrm{E}(Me) = ME(e) = 0$$
$$Var(X) = MZ_1 Var(U_1)(MZ_1)' + MZ_2 Var(U_2)(MZ_2)' + MZ_3 Var(U_3)(MZ_3)' + M\, Var(e) M'$$

ونفرض ان:

$$G_i = MZ_i \quad , \qquad i = 1,2,3,$$
$$Var(X) = G_1\, diag\, \sigma_1^2 I_{q_1} G_1' + G_2\, diag\, \sigma_2^2 I_{q_2} G_2' + G_3\, diag\, \sigma_3^2 I_{q_3} G_3' + M\, diag\, \sigma_4^2 I_N M'$$

والمصفوفة M متماثلة وغير قابلة للنمو (صماء) : Idempolent

$$M = M' = M^2$$
$$Var(X) = \sigma_1^2 G_1 G_1' + \sigma_2^2 G_2 G_2' + \sigma_3^2 G_3 G_3' + \sigma_4^2 M$$

نفرض أن :

$$V_i = G_i G_i' \quad , \quad i = 1,2,3$$
$$Var(X) = \sigma_1^2 V_1 + \sigma_2^2 V_2 + \sigma_3^2 V_3 + \sigma_4^2 V_4$$

اذ ان $V_4 = M$.

نفرض ان

$$\theta_i = \sigma_i^2 \quad , \quad (i = 1,2,3,4)$$

وبما أن $Var(X)$ هي دالة بدلالة المعلمات θ_i

إذن يمكن كتابة

$$Var(X) = \sum(\theta)$$

وإن مصفوفة التباين $\sum(\theta)$ يمكن التعبير عنها بالشكل الآتي :

$$\sum(\theta) = \theta_1 V_1 + \theta_2 V_2 + \theta_3 V_3 + \theta_4 V_4 \qquad \ldots\ldots(8)$$

وهي مصفوفة متماثلة بسعة $N \times N$.

إن المصفوفة $\sum(\theta)$ هي حالة خاصة من النموذج الذي اقترحه Kleffe and Pincas (1974) . وأن المعلمات $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ تقدر بواسطة تقدير الدالة الخطية التي اقترحها Rao (1974) وصيغتها بالشكل الآتي :

$$\alpha(X) = \ell_1\theta_1 + \ell_2\theta_2 + \ell_3\theta_3 + \ell_4\theta_4 = \ell'\theta \qquad \ldots\ldots(9)$$

انظر Mistal (1997) .

اذ أن $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)'$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)'$

والدالة الخطية $\alpha(X)$ تقدر بواسطة الشكل الثنائي Quadratic form

$$\hat{\alpha} = X' A X$$

إن A مصفوفة متماثلة بسعة $N \times N$ مطلوب إيجادها من البيانات ، وان $\hat{\alpha}$ تحقق الشروط الآتية :

1. عدم التحيز Unbiasedness .
2. تصغير دالة مجازفة بيز . انظر Rao and Kleffe (1988) .

وفي حالة وجود دالة التوزيع الأولي $g(\theta)$ للمعلمة $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)'$ فإن دالة الخسارة التربيعية تأخذ الصيغة الآتية :

$$L(\hat{\alpha}, \alpha) = (\hat{\alpha} - \alpha)^2 \qquad \ldots\ldots(10)$$

وإن دالة المجازفة تكون كما يأتي :

$$R(\hat{\alpha}, \alpha) = \mathrm{E}[L(\hat{\alpha}, \alpha)] = \mathrm{E}\left[(\hat{\alpha} - \alpha)^2\right]$$

بينما تأخذ دالة مجازفة بيز $B(\hat{\alpha})$ الشكل الآتي :

$$B(\hat{\alpha}) = \mathrm{E}_{\theta}[R(\hat{\alpha},\alpha)] = \mathrm{E}_{\theta}\left[\mathrm{E}(\hat{\alpha}-\alpha)^2\right]$$

$$B(\hat{\alpha}) = \int_{\theta\in\Omega} R(\hat{\alpha},\alpha)\, g(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{\theta\in\Omega} \mathrm{E}_{\theta}(\hat{\alpha}-\alpha)^2\, g(\theta)\, d\theta \quad , \quad \Omega = \{\theta : \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 > 0\} \quad \ldots\ldots(11)$$

نبرهن شرط عدم التحيز .

البرهان : يقال للتقدير $\hat{\alpha}$ تقدير غير متحيز للدالة الخطية α إذا كانت :

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \mathrm{E}(X'AX) = \alpha$$

$$\mathrm{E}(X'AX) = \mathrm{E}(tr\,(X'AX))$$

$$\mathrm{E}(tr\,AX\,X') = tr\,A\mathrm{E}(X\,X')$$

$$\mathrm{E}(X\,X') = Var(X) = \sum(\theta)$$

$$= \theta_1 V_1 + \theta_2 V_2 + \theta_3 V_3 + \theta_4 V_4$$

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = tr\,A(\theta_1 V_1 + \theta_2 V_2 + \theta_3 V_3 + \theta_4 V_4)$$

$$= tr\,A\sum_{i=1}^{4} \theta_i V_i$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \theta_i\, tr\,AV_i$$

يكون $\hat{\alpha}$ غير متحيز بالنسبة الى α اذا فقط اذا :

$$tr\,AV_i = \ell_i \qquad , \qquad i = 1,2,3,4 \qquad \ldots\ldots(12)$$

أي أن :

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \sum_{i=1}^{4} \ell_i\,\theta_i = \ell'\,\theta = \alpha$$

البرهان : يعتمد تصغير دالة مجازفة بيز على تصغير دالة المجازفة كما يأتي :

من (11) لدينا العلاقة

$$B(\hat{\alpha}) = \int_{\theta\in\Omega} \mathrm{E}_{\theta}(\hat{\alpha}-\alpha)^2\, g(\theta)\, d\theta$$

$$= \mathrm{E}_{\theta}\left[\mathrm{E}(\hat{\alpha}-\alpha)^2\right] = \mathrm{E}_{\theta}\left[\mathrm{E}(\hat{\alpha}-\mathrm{E}(\hat{\alpha}))^2\right]$$

$$= \mathrm{E}_{\theta}[Var(\hat{\alpha})] = \mathrm{E}_{\theta}[Var(X'AX)]$$

$$= \mathrm{E}_{\theta}[2tr\,AVar(X')AVar(X)]$$

$$= \mathrm{E}_{\theta}\left[2tr\,A\sum(\theta)A\sum(\theta)\right]$$

$$= \mathrm{E}_{\theta}\left[2tr\, A\sum_{i=1}^{4} V_i\theta_i\, A\sum_{i=1}^{4} V_i\theta_i \right]$$

$$= \mathrm{E}_{\theta}\left[2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \theta_i\theta_j\, tr\, AV_iAV_j \right]$$

$$B(\hat{\alpha}) = 2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \mathrm{E}(\theta_i\theta_j) tr\, AV_iAV_j \qquad \ldots\ldots.(13)$$

اذ أن : $\mathrm{E}(\theta_i\theta_j)$ يمثل العزم الثاني بالنسبة للمعلمة θ_i ومصفوفة العزم الثاني هي :

$$\mathrm{E}(\theta\theta') = C = (\mathrm{E}(\theta_i\theta_j)) = Var(\theta) + \mathrm{E}(\theta)(\mathrm{E}(\theta))'$$

حيث ان : $i, j = 1,2,3,4$

ويمكن تمثيل المصفوفة C بالشكل الآتي :

$$C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{4} r_{ik} r_{kj} \right) \quad , \quad i, j = 1,2,3,4 \qquad \ldots\ldots.(14)$$

أي أن C تساوي حاصل ضرب المصفوفتين اللتين تمثلان جذري المصفوفة C

$$C = \sqrt{C}\sqrt{C} = RR$$

بتعويض (14) في (13) ينتج أن

$$B(\hat{\alpha}) = 2\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} r_{ik} r_{kj}\, tr\, AV_iAV_j$$

$$= 2\sum_{k=1}^{4} tr\, A\left(\sum_{i=1}^{4} r_{ik} V_i \right) A \left(\sum_{j=1}^{4} r_{kj} V_j \right)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{4} trAT_k AT_k \qquad \ldots\ldots.(15)$$

اذ أن

$$T_k = \sum_{i=1}^{4} r_{ik} V_i \quad , \quad k = 1,2,3,4$$

ولحل العلاقة (15) نستخدم طريقة لاكرانج وفقاً الى شرط عدم التحيز (12) للحصول على قيمة قصوى صغرى ، ومن أجل ذلك نفرض ان :

$$S = 2\sum_{k=1}^{4} trAT_k AT_k + 4\sum_{i=1}^{4} \lambda_i (trAV_i - \ell_i) \qquad \ldots\ldots.(16)$$

اذ أن λ_i تمثل مضاريب لاكرانج Lagrange Multipliers ونشتق (16) بالنسبة الى A ثم نجعل المشتقة مساوية للصفر فنحصل على :

$$\frac{dS}{dA} = 4\sum_{k=1}^{4} T_k A T_k + 4\sum_{i=1}^{4} \lambda_i V_i = 0$$

أي أن

$$= \sum_{k=1}^{4} T_k A T_k + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i V_i = 0 \qquad ....(17)$$

ثم نشتق (16) بالنسبة الى λ_i وبمساواة المشتقة بالصفر يكون .

$$\frac{dS}{d\lambda_i} = 4\left(trAV_i - \ell_i\right) = 0$$

لهذا

$$trAV_i = \ell_i \quad , \quad i = 1,2,3,4 \qquad ....(18)$$

إن المعادلتين (17) و(18) تكونان على شكل مـصفوفات ، والمجهـول فيهـا هـو المصفوفة A ومضاريب لاكرانج $\lambda_i \left(i = 1,2,3,4\right)$ ، ومن أجل الحل وإيجاد قيم المجاهيـل نحول المعادلات من صيغ نظام المصفوفات الى نظام معادلات خطية ونستخدم في ذلك عملية المتجه Vec Operation . ونتيجة لذلك نحصل على :

$$\left(\sum_{k=1}^{4} T_k \otimes T_k\right) VecA + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i VecV_i = 0 \qquad ....(19)$$

$$\left(VecV_i\right)' VecA = \ell_i \quad , \quad i = 1,2,3,4 \qquad ....(20)$$

ويمكن التعبير عن المعادلة (19) بالصيغة الآتية

$$H\, VecA + \sum_{i=1}^{4} \lambda_i VecV_i = 0 \qquad ....(21)$$

اذ ان :

$$H = \sum_{k=1}^{4} T_k \otimes T_k$$

ويمكن صياغة نظام المعادلات الخطية (20) و(21) على النحو الآتي :

$$\begin{bmatrix} VecV_1 & VecV_2 & VecV_3 & VecV_4 & H \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_1' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_2' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_3' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & VecV_4' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ VecA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \\ \ell_4 \end{bmatrix} \quad ....(22)$$

ليكن

G : تمثل مصفوفة النظام (22) وبسعة $(N^2+4)\times(N^2+4)$.

W : يمثل متجه المجاهيل في النظام (22) وبسعة (N^2+4) .

B : يمثل متجه الثوابت في النظام (22) وبسعة (N^2+4) .

اذن يمكن كتابة نظام المعادلات (22) بالصيغة الآتية :

$$GW = B \qquad \ldots\ldots.(23)$$

واذا كانت G قابلة للانعكاس فيكون

$$W = G^{-1}B \qquad \ldots\ldots.(24)$$

وبإيجاد قيم المجاهيل W الذي يحتوي على $VecA, \lambda_i$ يمكن إيجاد المصفوفة A التي بواسطتها يمكن الحصول على تقدير مركبات التباين $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ وذلك من الشكل الثنائي $\hat{\alpha} = X'AX$ لكونه تقديراً غير متحيز للدالة الخطية :

$$\alpha(X) = \ell_1\theta_1 + \ell_2\theta_2 + \ell_3\theta_3 + \ell_4\theta_4 = \ell'\theta \qquad \ldots\ldots.(25)$$

اذا وفقط اذا :

$$trAV_i = \ell_i \quad , \qquad i = 1,2,3,4$$

راجع (12)

مثلاً لإيجاد $\hat{\theta}_1$ الذي هو تقدير للمعلمة θ_1 نضع $\ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = 0, \ell_1 = 1$ في (22) ونضع $\ell_1 = \ell_3 = \ell_4 = 0, \ell_2 = 1$ فنحصل على $\hat{\theta}_2$ وهو تقدير للمعلمة θ_2 ونضع $\ell_1 = \ell_2 = \ell_4 = 0, \ell_3 = 1$ فنحصل على $\hat{\theta}_3$ وهو تقدير للمعلمة θ_3 ثم نضع $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 0, \ell_4 = 1$ فنحصل على $\hat{\theta}_4$ وهو تقدير للمعلمة θ_4.

وأيضاً لو طلب تقدير $\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2$ نضع $\ell_1 = \ell_2 = 1,\ \ell_3 = \ell_4 = 0$ وكذلك لو طلب تقدير $\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3$ نضع $\ell_4 = 0$ وتصبح قيمة $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 1$.

وأيضاً لو طلب تقدير $\frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}{2}$ نضع $\ell_3 = \ell_4 = 0$ وتصبح قيمة $\ell_1 = \ell_2 = \frac{1}{2}$ وهكذا .

4- التوزيع الاولي للمعلمات θ_i

حسب قاعدة Jeffreys (1961) يمكن تحديد دالة كثافة احتمالية أولية Prior Pdf لمركبات التباين $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ وذلك بافتراض التوزيع المنتظم Uniform Distribution الذي يعتبر ابسط توزيع اولي وقد افترضنا هكذا لتوافر معلومات قليلة جداً عن المعلمات θ_i أي ان :

$$g(\theta) = \frac{1}{\overline{\theta} - \underline{\theta}} \quad \underline{\theta} \le \theta \le \overline{\theta} \qquad \ldots\ldots.(26)$$

اذ $\underline{\theta}$ تمثل الحد الادنى للمعلمات و $\overline{\theta}$ تمثل الحد الاعلى للمعلمات . وفرض أن المعلمـات $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ مستقلة أي أن

$$g(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = g(\theta_1) g(\theta_2) g(\theta_3) g(\theta_4)$$

لذلك يكون

$$Cov(\theta_i, \theta_j) = 0 \qquad i \neq j = 1,2,3,4$$

فينتج لدينا :

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\overline{b}_1 + \underline{b}_1}{2} \\ \frac{\overline{b}_2 + \underline{b}_2}{2} \\ \frac{\overline{b}_3 + \underline{b}_3}{2} \\ \frac{\overline{b}_4 + \underline{b}_4}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\overline{b}_1 + \underline{b}_1}{2} & \frac{\overline{b}_2 + \underline{b}_2}{2} & \frac{\overline{b}_3 + \underline{b}_3}{2} & \frac{\overline{b}_4 + \underline{b}_4}{2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{(\overline{b}_1 - \underline{b}_1)^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\overline{b}_2 - \underline{b}_2)^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\overline{b}_3 - \underline{b}_3)^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\overline{b}_4 - \underline{b}_4)^2}{12} \end{bmatrix} \ldots\ldots.(27)$$

إن المصفوفة C تكون بمثابة المعلومات الأولية حـول المعلمـات $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ أنظر Taraldsen and Lindqvist (2007) .

ثم نجد جذر المصفوفة C :

$$C = RR = (r_{ij})(r_{ij}) \qquad , \qquad i, j = 1,2,3,4 \qquad \ldots\ldots.(28)$$

5- الجانب التطبيقي :

لقد طبقت النتائج النظرية في هذا البحث على بيانات حقيقية مصدرها تجـارب نفّـذت مـن البرنامج الوطني لتطوير زراعة الذرة الصفراء في العراق لسنة (2005) . وكانت البيانـات على النحو الاتي :

الجدول (1) : يمثل بيانات عن الذرة الصفراء

العامل B / العامل A	d_1	d_2	d_3	d_4
g_1	21.82 23.4 20.78	19.45 20.38 21.12	20.35 21.13 20.24	26.31 25.2 25.81
g_2	21.05 19.12 19.81	18.42 18.82 19.2	19.31 20.65 19.1	17.81 18.04 17.73
g_3	18.94 19.74 19.17	23.04 22.55 23.14	23.65 24.13 24.03	24.52 26.1 25.84
g_4	19.37 19.8 21.15	19.52 17.98 20.43	17.82 18.05 17.14	17.88 18.34 18.92
g_5	27.25 25.92 28.06	20.35 21.04 21.15	27.35 26.32 27.87	17.62 16.82 18.02
g_6	18.31 19.18 19.91	18.2 18.62 19.08	18.52 19.62 18.51	20.35 20.1 19.72

حيث ان :

a : هي ست سلالات نقية من الذرة الصفراء .

b : اربعة مستويات من السماد النتروجيني .

n : التكرار لكل خلية .

نفترض ان مجتمع نبات الذرة الصفراء هو مجتمع ذو حجم كبير ومن اجل جعل هذا النموذج عشوائياً ثنائي التقسيم مع وجود التفاعل فلابد من سحب عينة عشوائية من مجتمع نبات الذرة الصفراء ولنفترض ان حجم العينة هو (24) ، اذ تم سحب العينة العشوائية باستخدام جداول الأرقام العشوائية Snedecore and Cochran (1980) حصلنا على العينة العشوائية الاتية كما في الجدول (2):

الجدول (2) : يمثل الصفوف والاعمدة للعينة العشوائية

العامل B / العامل A	$d_1(1)$	$d_3(2)$	$d_4(3)$	مجموع الصفوف
$g_2(1)$	21.05 19.81 $(y_{11\bullet})$	19.31 19.1 $(y_{12\bullet})$	17.81 18.04 $(y_{13\bullet})$	$y_{1\bullet\bullet}$
$g_3(2)$	18.94 19.74 $(y_{21\bullet})$	23.65 24.13 $(y_{22\bullet})$	24.52 25.84 $(y_{23\bullet})$	$y_{2\bullet\bullet}$
$g_4(3)$	19.37 19.8 $(y_{31\bullet})$	17.82 18.05 $(y_{32\bullet})$	18.34 18.92 $(y_{33\bullet})$	$y_{3\bullet\bullet}$
$g_6(4)$	18.31 19.18 $(y_{41\bullet})$	18.52 19.62 $(y_{42\bullet})$	20.35 20.1 $(y_{43\bullet})$	$y_{4\bullet\bullet}$
مجموع الأعمدة	$y_{\bullet 1 \bullet}$	$y_{\bullet 2 \bullet}$	$y_{\bullet 3 \bullet}$	$y_{\bullet\bullet\bullet}$

اذ ان :

$y_{\bullet\bullet\bullet}$: المجموع العام لنتائج جميع المشاهدات من العينة العـشوائية ويعبـر عنـه بـالرمز $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}$

$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$: الوسط العام ويعبر عنه بالرمز $\frac{y_{\bullet\bullet\bullet}}{abn}$

وهنا n=2, b=3, a=4

$$y_{i\bullet\bullet} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} y_{ijk}$$

$$y_{\bullet j\bullet} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} y_{ijk}$$

$$y_{ij\bullet} = \sum_{k=1}^{2} y_{ijk}$$

اذ ان : $y_{i\bullet\bullet}$: مجموع نتائج جميع المشاهدات للعامل i .

$y_{\bullet j\bullet}$: مجموع نتائج جميع المشاهدات للعامل j .

$y_{ij\bullet}$: مجموع المشاهدات في الخلية الواقعة في الصف i والعمود j .

ومن ثم تطبيق طريقة تحليل التباين (ANOVA) وظهرت النتائج في جدول تحليـل التباين على النحو الاتي :

الجدول (3) : تحليل التباين

مصدر التباين $(S.O.V)$	مجموع المربعات $(S.S.)$	درجات الحرية $(D.F.)$	متوسط المربعات $(M.S.)$	توقع متوسط المربعات $E(M.S.)$
بين الصفوف	111.8620	3	37.2873	$\hat{\sigma}_1^2 = 1.6972$
بين الاعمدة	12.7074	2	6.3537	$\hat{\sigma}_2^2 = -2.5935 \simeq 0$
التفاعل بين الصفوف والاعمدة	162.6248	6	27.1041	$\hat{\sigma}_3^2 = 13.3016$
الخطأ	6.0119	12	0.5010	$\hat{\sigma}_4^2 = 0.5010$
الكلي	293.2062	23		

ومن الجـدير بالملاحظـة ان $\hat{\sigma}_2^2 = -(2.5938)$ وهـذا مـا ينـاقض تعريـف التباين الواجب ان تكون له قيمـة غيـر سـالبة nonnegative $\left(\hat{\sigma}_2^2 \geq 0\right)$ الا ان التبـاين السالب هو مشكلة موجودة فـي علـم الاحـصاء ودرسـت مـن علمـاء عديـدين مـثلاً Rao and Kleffe (1988), Marshall and Mardia (1985), Searle (1971) ، وفـي حالة القيمة السالبة للتباين تكون قيمة التباين مساوية للصفر .

$$\hat{\sigma}_2^2 = 0$$

ومن ثم تطبيق اسلوب BAQUE المذكور في الجانب النظري اذ تعتبـر التقـديرات التي حصلنا عليها في الجدول (3) قيماً اولية للمعلمات مع اعتبار دالة الخسارة التربيعية اذ تم عد التوزيع الاولي للمعلمات بوصفه توزيعاً منتظماً وهذا التوزيع يعتبر اضـعف التوزيعـات الاولية وابسطها .

وقد اضطررنا الى اعتبار هذا التوزيع اولياً بسبب عدم تـوافر معلومـات اوليـة أو تاريخية عن هذه المعلمات Box and Tiao (1973), Jeffreys (1961) .

ومن معرفة التوزيعات الاولية للمعلمات نحصل على العزمين الاول والثاني للمعلمات وهذان العزمان هما المطلوبان في اسلوب (BAQUE) .

افرض $\theta_i = \sigma_i^2 \ , i = 1,2,3,4$

حصلنا على التقديرات الاولية باستخدام طريقة تحليل التباين فكانت

$$\hat{\theta}_1 = 1.6972 \quad , \quad \hat{\theta}_2 = 0 \quad , \quad \hat{\theta}_3 = 13.3016 \quad , \quad \hat{\theta}_4 = 0.5010$$

ومما تقدم فقد اعتبرنا المعلومات الاولية للمعلمات $\theta_4, \theta_3, \theta_2, \theta_1$ آخذة نمط التوزيع المنتظم وباستخدام المعادلات في (26) نحصل على :

$$g(\theta_1) = f(\theta_1) = \frac{1}{1.6972} = 0.5892 \qquad 0 < \theta_1 < 1.6972$$

$$g(\theta_3) = f(\theta_3) = \frac{1}{13.3016} = 0.0752 \qquad 0 < \theta_3 < 13.3016$$

$$g(\theta_4) = f(\theta_4) = \frac{1}{0.5010} = 1.9960 \qquad 0 < \theta_4 < 0.5010$$

وباستخدام النتائج في (27) نحصل على

$$C = \begin{bmatrix} 0.9602 & 0 & 5.6439 & 0.2126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.6439 & 0 & 58.9773 & 1.6660 \\ 0.2126 & 0 & 1.6660 & 0.0837 \end{bmatrix}$$

وكانت نتائج تقديرات بيز بوساطة اسلوب (BAQUE) على النحو الاتي:

$\hat{\sigma}_1^2$	$\hat{\sigma}_2^2$	$\hat{\sigma}_3^2$	$\hat{\sigma}_4^2$
1.521	$-2.59 \simeq 0$	12.986	0.4615

حيث ان $\hat{\sigma}_1$ $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\theta}_1$

يمكن برمجة الخوارزميات باستخدام نظام MATLAB7 نلاحظ من الجدول اعـلاه ان التقديرات مقاربة جداً للتقديرات التي حصلنا عليها باسلوب تحليل التبـاين وهـذه النتـائج مشجعة جداً .

كما استخدمنا اسلوب التكرار لحين الوصول الى خطأ 10^{-6} وكان التقارب سريعاً .

6- الاستنتاجات والتوصيات :

1- اعتبار نتائج تقدير معلمات التباين من جدول تحليل التباين قيماً ابتدائية لهذه المعلمات تم استخدامها في اسلوب (BAQUE) .

2- اظهر تحليل التباين ان تقدير $\hat{\sigma}_2^2$ (تباين تأثير الاعمدة) هو سالب وهذا مناقض لتعريف التباين الذي يجب ان يكون غير سالب ($\hat{\sigma}_2^2 \geq 0$) وهنا يجب ان نعتبره مساوياً للصفر.

3- تم اعتبار التوزيع المنتظم توزيعا اوليا للمعلمات في اسلوب (BAQUE) وهذا التوزيع يعتبر اضعف المعلومات عن المعلومات .

4- يمكن اعتبار التوزيع الاولي توزيعا اسيا او توزيع مربع كاي .... الخ . وحسب لمعلومات التاريخية المتوفرة عن المعلمات واستخدام اسلوب التكرار Iteration

5- يمكن افتراض القيم الابتدائية قيماً لاعلى التعيين ومحاولة تكرار اسلوب (BAQUE) للحصول على التقارب Convergence دون تطبيق اسلوب تحليل التباين للحصول على القيم الابتدائية ولأي تصميم مثلاً تصميم ثلاثي التقسيم او رباعي التقسيم او تصميم المربع اللاتيني .... الخ .

المصادر

1. إسماعيل ، يونس حازم ، (2005) ، "الكشف عن القيم الشاذة باستخدام التوزيع المختلط بالاعتماد على معاينة جبس وأسلوب بيز" ، (رسالة ماجستير غير منشورة) ، كليةالتربية ، جامعة الموصل .
2. سالم ، سلطان علي ، (1997) ، "تقدير مركبات التغاير المكاني" ، (رسالة ماجستير غير منشورة) ، كلية التربية ، جامعة الموصل .
3. فتحي ، ايمان طارق ، (2006) ، "تقدير بيز في النماذج الخطية المختلطة باستخدام معاينة جبس" ، (رسالة ماجستير غير منشورة) ، كلية التربية ، جامعة الموصل .
4. فتحي ، يونس محمد ، (1998) ، "تقدير بيز لدوال التغاير الفراغي بمعلمتين وثلاث معالم" ، (رسالة ماجستير غير منشورة) ، كلية التربية ، جامعة الموصل .
5. قاسم ، محمد نذير ، ابراهيم ، اغصان محمود ، (2006) ، "تقدير مكونات التباين بواسطة التعظيم غير الخطي" ، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (10) 2006 ، ص ص [48-60] ، جامعة الموصل ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات .

6. قاسم ، محمد نذير ، عباس ، سمير عبد الجبار ، (2001) ، "استخدام اسلوب بيـز فـي تقدير مركبات التباين لنموذج التأثير العشوائي الاحادي التقسيم" ، المجلة العراقية للعلـوم الاحصائية (1) 2001 ، ص ص [69-81] ، جامعة الموصل ، كلية علـوم الحاسـبات والرياضيات .

7. Besag, J. and Green, P.J. (1993): Spatial Statistical and Bayesian Computation. J.R. Statist. Soc. B., 55, No. 1, pp. 25–37.
8. Box, G.E.P. and Tiao, G.C. (1973): Bayesian Inference in Statistical Analysis. Addison–Wesley Publishing Company, California, London.
9. Chaturvedi, A. (1996): Robust Bayesian Analysis of the Linear Regression Model. J. of Statistical Planning and Inference, 50, 175–178.
10. Gui, H., Stein, A. and Myers, D.E. (1995): Extension of Spatial Information, Bayesian Kriging and Updating of Prior Variogram Parameters. Envrmtrc, 6, pp. 373–384.
11. Jeffreys, H. (1961): Theory of Probability. Clarenden Press, Oxford, London.
12. Kleffe, J. and Pincus, R. (1974): Bayes and Best Quadratic Unbiased Estimator for Parameters of the Covariance Matrix in Linear Model Math, Operation Statist 5, p. 43–67.
13. Marshall, R.J. and Mardia, K.V.(1985) minimum Norm Quadratic Estimation of components of spatial covariance. Math Geo., Vol. 17, No. 5, pp.517-525.
14. Mistal, I. (1997): Estimation of variance components with large–scale Dominance models.
15. Rao, C.R. (1972): "Estimation of variance and covariance components in linear models" J. Am. Statist. Assoc., vol. 67, p. 112–115.

16. Rao, C.R. and Kleffe, J. (1988): Estimation of variance component and application north Holland, Amsterdam.
17. Searl, S.R. (1971): Linear Models. John Wiley, New York.
18. Searl, S.R. Casella, G. and McCulloch, C.E. (1992): Variance component. Wiley, New York.
19. Snedecor and Cochran (1980): Statistical Method (seventh edition), University Press U.S.A.
20. Taraldsen, G. and Lindqvist, B.H. (2007): Bayes Theorem for Improper priors. http://www.math.ntnu.no/preprint/statistics.
21. Zeger, S.L. and Karim, M.R. (1991): Generalized Linear Models with Random Effect; A Gibbs Assoc. 86, No. 413, 79–86.