المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (17) 2010
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات -الاحصاء والمعلوماتية
ص ص [83-96]

طريقة مقترحة لتقدير المعدل الزمني لحدوث الأمطار في مدينة الموصل كعملية بواسونية غير متجانسة

مثنى صبحي السليمان * باسل يونس ذنون **

الملخص

يتناول هذا البحث دراسة العملية البواسونية غير المتجانسة بأسلوب مقترح جديد وذلك من خلال دمج طريقتين للتقدير في طريقة واحدة للوصول إلى مقدر للمعدل الزمني للحدوث دون اللجوء إلى توزيعات احتمالية شائعة وتقدير معلماتها. إذ تم توظيف طريقة لامعلمية، هي طريقة التقدير أللبي، ضمن طريقة مقترحة للتقدير.

ويتضمن التطبيق العملي دراسة الفترات بين حدوث الأمطار في محطة الموصل للأنواء الجوية في محافظة نينوى، ويتم تقدير المعدل اليومي لحدوث الأمطار بالطريقة الإحصائية المقترحة في البحث، ومقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع نتائج أخرى تم الحصول عليها سابقاً باستخدام مقدرين آخرين. ويتضح من خلال هذه المقارنة كفاءة الطريقة المقترحة في تقدير المعدل الزمني لحدوث الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة.

كلمات دالة: العملية البواسونية غير المتجانسة، التقدير ألّلبي، تقدير القطع الحكيمة الخطية، الأمطار.

A Suggested Method for Estimating the Rate of rainfall in Mosul as a Non-Homogeneous Poisson Process

Abstract

This research deals with the non-homogeneous Poisson process in a suggested method through mixing two methods of estimation in one method to arrive at the estimate of the rate of occurrence without using common probability distribution and estimating their parameters. A non-parametric method has been applied in a suggested method of estimation.

The practical application includes studying the period of daily rainfall in Mosul Forecasting Station in Neneva. The rate of daily rainfall has been estimated in the static method suggested in the research. The result arrived at in this research has been compared with other results shown by other two estimators. The efficiency of this suggested method becomes clear in estimating the rate of occurrence of events in non-homogenous Poisson process through this comparison.

Keywords: Non-Homogenous Poisson Process, Kernel Estimation, Piecewise Linear Estimation, Rainfall

* مدرس/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل
** استاذ/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل

تاريخ التسلم: 2009/7/1 ــــــــــــــــــ تاريخ القبول : 6 /12 /2009

1. المقدمة *Introduction* :

تُعد الطرائق اللامعلمية (Non-Parametric Methods) في التقدير الإحصائي من الطرائق التي تلاقي اهتماماً واسعاً, خاصاً في الوقت الحاضر. إذ إن الطرائق اللامعلمية يمكن أن تستعمل ضمن التحليل الاستطلاعي (Exploralor Analysis) لتحقيق تركيب البيانات وللمساعدة في اختيار نوع النموذج المعلمي الجيد الملائم للبيانات. إن هذه الطرائق لا تفترض أي شروط مسبقة, لذا فهي لا تكون مقيدة بافتراضات قد لا تتلاءم كلّياً مع طبيعة المسألة قيد الدراسة.

وفي هذا البحث تم توظيف طريقة لامعلمية ضمن طريقة مقترحة لتقدير المعدل الزمني للحدوث في العملية البواسونية غير المتجانسة في فترة زمنية محددة, إذ إن هذه الطريقة لا تفترض نموذجاً معيناً لتحديد معلمات أو دوال موزونة. كما يمكن أن تستخدم هذه الطريقة لتوليد أزمنة حدوث الحوادث وذلك عندما تستخدم العملية البواسونية غير المتجانسة كمدخلات في محاكاة المونت كارلو (Monte Carlo Simulation).

إن الطرائق المعلمية تكون ملائمة للبيانات بصورة عامة وذلك عندما يتم استخدام طريقة الإمكان الأعظم المعلمية لتقدير معلماتها, في حين أن الطرائق اللامعلمية تُعد أكثر مرونةً في التقدير مثل طريقة التقدير أللبي (Kernel Estimation Method) أو طريقة الشرائح (Spline Method). ففي عام 1976 قدم الباحثان [Lewis and Shedler, 1976] بحثاً بينا تقنيات لامعلمية لتقدير المعدل الزمني للحدوث لصياغة الصفقات في نظام قاعدة البيانات, وأحد هذه المقدرات اللامعلمية المستخدمة هو التقدير أللبي. وقد قدم الباحث [ذنّون, 1998] بحثاً أستعرض فيه التقدير أللبي بوصفه أسلوبا بيانيا حديثا في التقدير الإحصائي لتقدير دالة كثافة الاحتمال والمعدل الشرطي والتباين الشرطي في حالة البعدين والثلاثة أبعاد وكذلك في حالة البيانات الإحصائية والبيانات المأخوذة من سلاسل زمنية. وفي بحث [Choi and Hall, 1998] تم استخدام التقدير أللبي لتحليل العملية البواسونية غير المتجانسة المتمثلة بظاهرة الزلازل في اليابان. وأستخدم الباحثان [Helmers and Mangku, 2000] المقدر أللبي كطريقة لامعلمية في التقدير. وفي بحث [Zhuang et al.,2002] تم استخدام المقدر أللبي لتقدير خلفية المعدل الزمني لحدوث الزلازل في نموذج امتداد المكان-الزمان الطبيعي لهاكس الأحادي البعد (Natural Space-Time Extension of the One-Dimensional Hakes Model), وطريقة الإمكان الأعظم لتقدير تأثير تسبب الصدمات. كما استخدم هذا الأجراء الباحث [Peng, 2003] في بحثِهِ للدكتوراه على تطبيقات العملية النقطية متعددة الأبعاد في تقييم

خطر الحرائق الهائلة في محافظة لوس انجلوس في كاليفورنيا, فضلاً عن تطوير طرائق لامعلمية لتقدير توزيع جديد لعملية تغطية المكان والزمان.

وفي بحثه للدكتوراه، قدم الباحث [السليمان، 2006] دراسة عن تقدير المعدل الزمني حدوث الحوادث في العملية البواسونيه غير المتجانسة تضمنت طرائق معلمية فضلاً عن طريقة مقترحة لامعلمية. وتم تخصيص الجانب التطبيقي لتلك الدراسة على عملية نقطية (Point Process) مهمة جداً وهي الأمطار في محطة من المحطات الرئيسة للأنواء الجوية في محافظة نينوى في العراق. وتتناول هذه المقالة الطريقة اللامعلمية المقترحة بجانبيها النظري والتطبيقي.

2. العمليّة البواسونية غير المتجانسة:

Non-Homogeneous Poisson process:

إن العملية النقطية التي تتنمذج على وَفْق نموذج بواسون تُعرف بالعملية البواسونية (Poisson Process)، والعملية البواسونية هي عملية تصادفيه ذات فضاء حالة S متقطع, وفضاء معلمة T مستمر, وعادةً T يمثل الزمن. وفي هذه العملية لا تحدث الحوادث إطلاقاً في آنٍ واحد, أي إن فرصة حدوث حادثتين أو أكثر في آنٍ واحد مهملة.

فإذا فرضنا إن العملية النقطية $\{N(t)\ ;\ t > 0\}$ هي عملية بواسونية بمتوسط حدوث الحوادث على المحور الزمني هو λ, ويطلق عادةً على λ بالمعدل الزمني لحدوث الحوادث (Rate of Occurrence of Events) , فإن λ هي معلمة العملية البواسونية وهي ثابتة مع الزمن(أي لا تتغير بتغير الزمن). أما إذا كانت λ متغيره, أي إنّها تتغير بتغير الزمن, فان العملية $\{N(t)\ ;\ t > 0\}$ هي عملية بواسونية غير متجانسة (Non-Homogeneous Poisson Process)، إذ إن حدوث الحوادث في العملية البواسونية الاعتيادية يكون بشكل عشوائي خلال فترة زمنية معينة بنسبة حدوث ثابتة λ من الحوادث لكل وحدة زمنية, في حين إن النسبة التي تحدث عندها الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة تَتغير بتغير الزمن, وتُسمى بالمعدل الزمني للحدوث أو يطلق عليها دالة ألشده (Intensity Function) ويرمز لها بالرمز $\lambda(t)$. وتُعد دراسة العمليات البواسونية غير المتجانسة من الأمور المهمة لارتباطها بالحالات أو الظواهر الواقعية والتي يكون فيها المعدل الزمني لحدوث الحوادث يتغير بتغير الزمن (أي دالة بدلالة الزمن t).

3. المقدّر أللبي للمعدل الزمني للحدوث:

Kernel Estimator of the Rate of Occurrence:

لو فرضنا أن $\{N(t)\ ;\ t > 0\}$ تمثل عدد الحوادث التي تحدث فـي الفتـرة الزمنيـة $[0,t_0)$, إذ أن t_0 تمثل زمن حـدوث الحادثـة الأخيـرة، وفرضـنا أن العمليـة التـصادفية $\{X_n\ ,\ n \geq 1\}$ تمثل أوقات الحدوث البينية للحوادث أو الفترات الزمنية بين حدوث الحوادث. وفي هذه الدراسة تم اقتراح استخدام مقدر لامعلمي للمعدل الزمني للحدوث $\lambda(t)$ ينتمي إلـى فصيلة المقدرات أللبيه (Kernel Estimators) ويتميز هـذا المقـدر بأنـه مقـدر ممهـد (Smooth) خالٍ من التعرجات الحادة, كما أنه لا يعتمد على أية فروض صارمة مما يـؤدي بالنتيجة إلى إعطاء صورة واضحة ونقية للشكل العام للدالة $\lambda(t)$. والمقدر المقترح اسـتخدامه له الصيغة العامة الآتية:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{1}{b(n)} \sum_{j=1}^{n} W\left(\frac{t - t_j}{b(n)}\right) \quad , \quad t > 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

إذ إن n تمثل عدد الحوادث التي حدثت في الفتـرة الزمنيـة $[0,t_0)$, و $t_1 , t_2 , \ldots , t_n$ تمثل الفترات بين حدوث الحوادث أو المشاهدات (Inter Event Times). أما الدالـة $W(\cdot)$ فإنها تمثل دالـة الـب, وهـي دالـة محـددة قابلـة للتكامـل وموزونـة وغيـر سـالبة (Bounded, Non-Negative, Integrable Weight Function) وتحقـق الـشرطين الآتيين (ذنون، 1998):

i) $W(u) \geq 0 \quad \forall u \quad ,$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} W(u)\,du = 1 \quad .$

وتسمى الدالة $W(\cdot)$ عادةً بدالـة النافـذة (Window Function) وتقـوم بتمهيـد المقـدر وإزالة التعرجـات منـه. أمـا $b(n)$ فهـي دالـة سـعة القيـد (Band Width) وتـسمى معلمـة التمهيـد (Smoothing Parameter), إذ إن دالـة سـعة القيـد يـشترط فيهـا أنها تساوي صفراً عندما n تقترب من المالانهاية. أما بالنسبة لاختيار معلمة سعة القيـد $b(n)$ فهنالك تفاصيل نظرية عديدة معطاة مـن قبـل البـاحثين [Wand and Jones, 1995] و [Bowman and Azzalini, 1997] وكذلك [Loader,1999]. وهنالك معالجـة أخـرى لاختيار معلمة دالة سعة القيد وذلك باختيار عدد صحيح وموجب, مثل k, ومن ثم تُعرف سعة القيد عند نقطة مثل x لكي تكون القيمة الأصغر h بحيث أن مركز الـدائرة عنـد النقطـة x بنصف قطر h يحتوي على k من نقاط البيانات[Peng, 2003]. والأقرب لنوع معلمة سـعة

القيد هي الطريقة المستعملة من لدن الباحثين[Zhuang et al., 2002] وفي بحث [Choi and Hall, 1998] الذين استخدموا طريقة التجربة والخطأ لاختيار قيمة k.

ومن المعروف جيداً إن الاختيار لدالة النافذة $W(\cdot)$ من الأهمية أقل بكثير من اختيار معلمة سعة القيد. فهنالك العديد من دوال النافذة المقترحة من قبل العديد من الباحثين في هذا الموضوع, كما في بحث [Thanoon, 1994] الذي استخدم نافذة بارتليت (Bartlett Window) والتي تسمى بالنافذة ألمثلثيه (Triangular Window) والتي تُعرف رياضياً بالشكل الآتي:

$$W(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{m} & ; \quad |x|\le m\\ 0 & ; \quad |x|>m\end{cases} \qquad \ldots\ldots (2)$$

إذ إن m تمثل نقطة القَطع (Truncation Point). إن النافذة ألمثلثيه في أعلاه تتميز بالسهولة والكفاءة مقارنةً مع النوافذ الأخرى المعروفة, كنافذة المستطيل ونافذة بارزن (Parzen Window) ونافذة كاوز (Gaussian Window) التي لها الصيغة الآتية:

$$W(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad . \qquad \ldots\ldots (3)$$

4. مقدّر القطع الحكيمة الخطي:

Piecewise Linear Estimator:

من المعروف جيداً بأن العلاقات والصيغ الخطية هي من أسهل العلاقات الرياضية من حيث البناء ألرياضي, ونتيجة لذلك نجد بأن الصيغ الخطية قد شاعت وانتشرت في شتى المجالات. من ناحيةٍ ثانية فإن أغلب العلاقات الواقعية في شتى التطبيقات تكون ذات شكل غير خطي (Non-Linear). إن الصعوبة الرئيسة في العملية البواسونية غير المتجانسة تكمن في أن المعدل الزمني للحدوث $\lambda(t)$ هو دالة غير معروفة الشكل أو الصيغة بدلالة الزمن t ، لذا ففي أغلب البحوث تم اقتراح شكل رياضي معين لهذه الدالة. وبالتأكيد فإن الشكل المقترح للدالة $\lambda(t)$ قد يكون مناسباً أو غير مناسب حسب طبيعة المسألة قيد الدراسة.

إن الفكرة التي تراودنا لتقدير$\lambda(t)$ تتضمن أن يكون التقدير في مرحلتين: في المرحلة الأولى يتم تحديد الشكل الدقيق للدالة $\lambda(t)$ بيانياً من خلال القيام بعملية التقدير أللبي لهذه الدالة بالمقدر $\hat{\lambda}^{(1)}(t)$ في ضوء البيانات المتوافرة. أما في المرحلة الثانية, وبعدَ دراسة الشكل العام للمقدر $\hat{\lambda}^{(1)}(t)$ بدقّة وحكمة (Wisdom), فيتم تقريب المقدر $\hat{\lambda}^{(1)}(t)$ بالمقدر $\hat{\lambda}^{(2)}(t)$ والذي هو عبارة عن قطع حكيمة خطية.

لو فرضنا أن $\{t_1,\ t_2,\ \ldots\ ,t_n\}$ تمثل أزمنة حدوث الحوادث في عملية بواسونية غير متجانسة خلال الفترة الزمنية $T_0=(0,t_0]$. ولو كان $\lambda(t)$ يمثل المعدل الزمني لحدوث الحوادث لهذه العملية, فإن المقدر أللبي لهذه المعلمة, وحسب العلاقة (1), سيكون بالشكل الآتي:

$$\hat{\lambda}^{(1)}(t)=\frac{1}{b(n)}\sum_{j=1}^{n}W\left(\frac{t-t_j}{b(n)}\right) \qquad \ldots\ldots (4)$$

وبعد رسم المقدر $\hat{\lambda}^{(1)}(t)$ عِندَ قيم مختلفة للدليل t في الفترة T_0, يدرس الشكل الناتج بحكمة ثم تقسم الفترة T_0 إلى عدد محدود, مثل k, من الفترات الزمنية الجزئية غير المتداخلـة $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_k$ بحيث إن:

$$T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_k=T_0 \quad ;T_i\cap T_j=\phi \quad \forall\, i\neq j$$

بحيث يكون شكل الدالة في كل فترة زمنية قريباً من شكل خط مستقيم.

أما المرحلة الثانية مـن التقـدير فتتـضمن التقـدير المعلمـي, إذ يقطّـع المقـدر أللبي $\hat{\lambda}^{(1)}(t)$ إلى مجموعة صغيرة من القطع الحكيمة وتتم ملاءمة نموذج انحداري خطـي لكل قطعة من القطع الحكيمة لكي نحصل في النهاية على مقدر القطع الحكيمة الخطية الآتي:

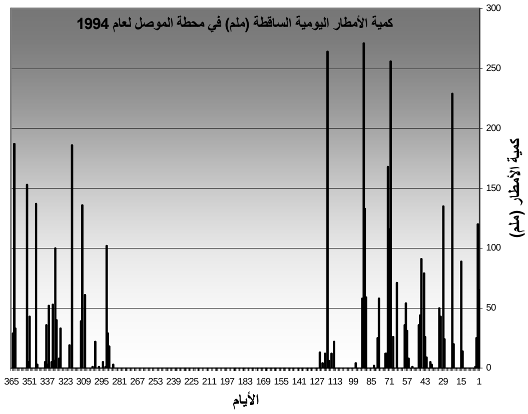
$$\hat{\lambda}^{(2)}(t)=\begin{cases}\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1 t & if \quad t\in T_1\\ \hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2 t & if \quad t\in T_2\\ \vdots & \qquad \vdots\\ \hat{\alpha}_k+\hat{\beta}_k t & if \quad t\in T_k\end{cases} \qquad \ldots\ldots (5)$$

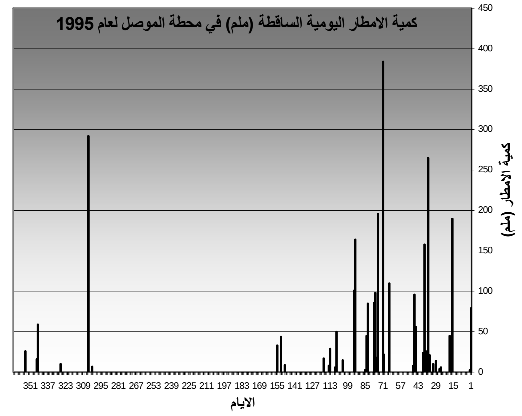
إذ إن $\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\ldots,\hat{\alpha}_k$ و $\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\ldots,\hat{\beta}_k$ هي المقدرات التي نحصل عليها مـن ملاءمـة نموذج انحداري ولكل قطعة من القطع الحكيمة على حده.

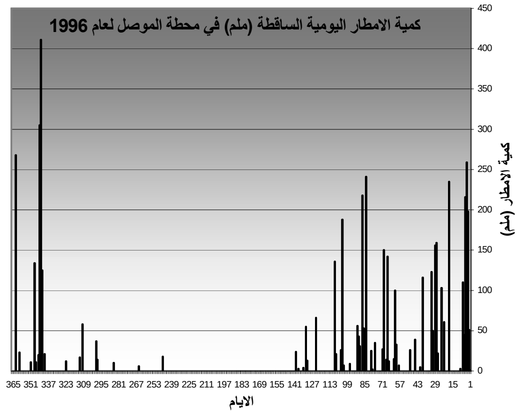
5. تطبيق عن الأمطار في محطة الموصل للأنواء الجوية في محافظة نينوى:

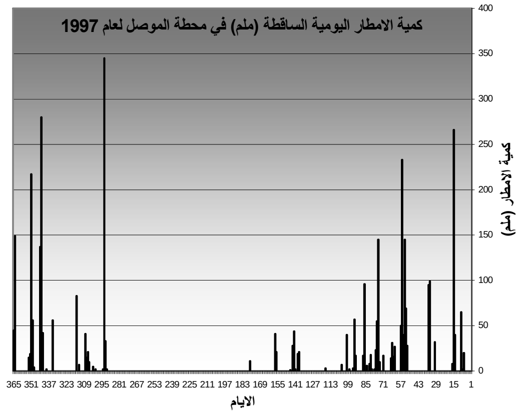
Application of Rainfall in Mosul Weather Forecasting Station of Neneva:

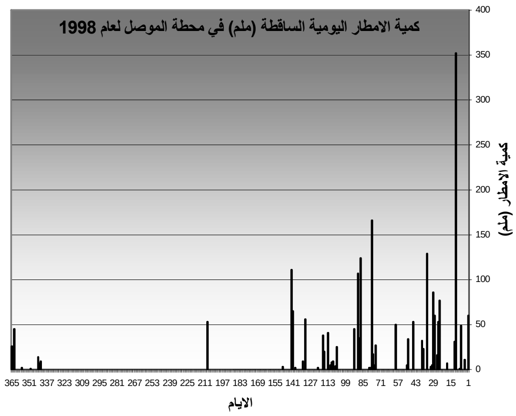
كجانب تطبيقي لهذا البحث تم اختيار المعدلات اليومية لحدوث الأمطار فـي محطـة الموصل للأنواء الجوية في محافظة نينوى للفتـرة مـن عـام 1994 ولغايـة عـام 2000 [السليمان، 2006]. إن الرسم الزمني للأمطار اليومية المسجلة في هذه المحطة موضح فـي الشكل (1) لكل سنة على حِدةٍ وكذلك للسنين السبع مجتمعةً. ويبدو واضحاً منطقيـة النمذجـة النقطية للأمطار، كما يلاحظ موسمية الأمطار فضلاً عن سـلوكها الذي يبدو غير متماثـل بيـن سنة وأخرى مما يعد مؤشـراً على أن العمليات التصـادفية قيد الدراسة تعتمد علـى الـزمن (Time Dependent) فـي سـلوكها، أي إنهـا عمليـات غيـر متجانـسة (Non-Homogeneous Processes).

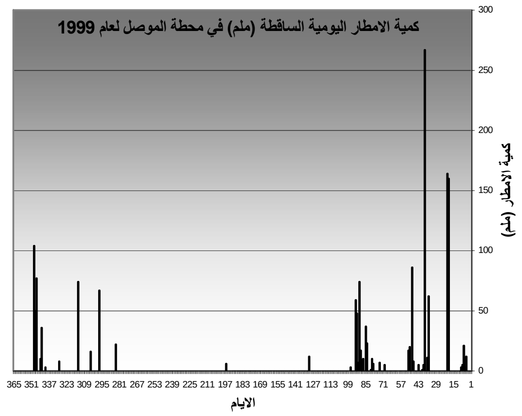


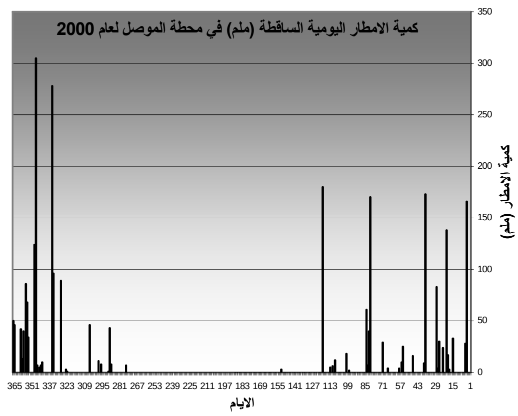


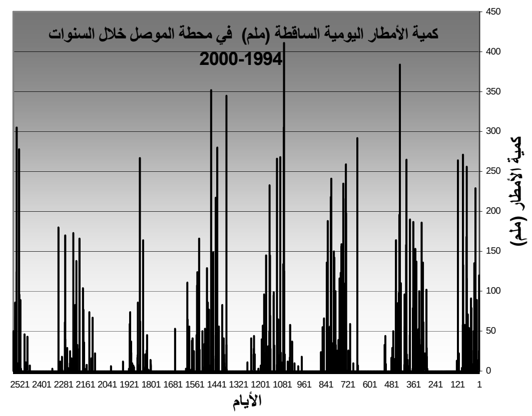






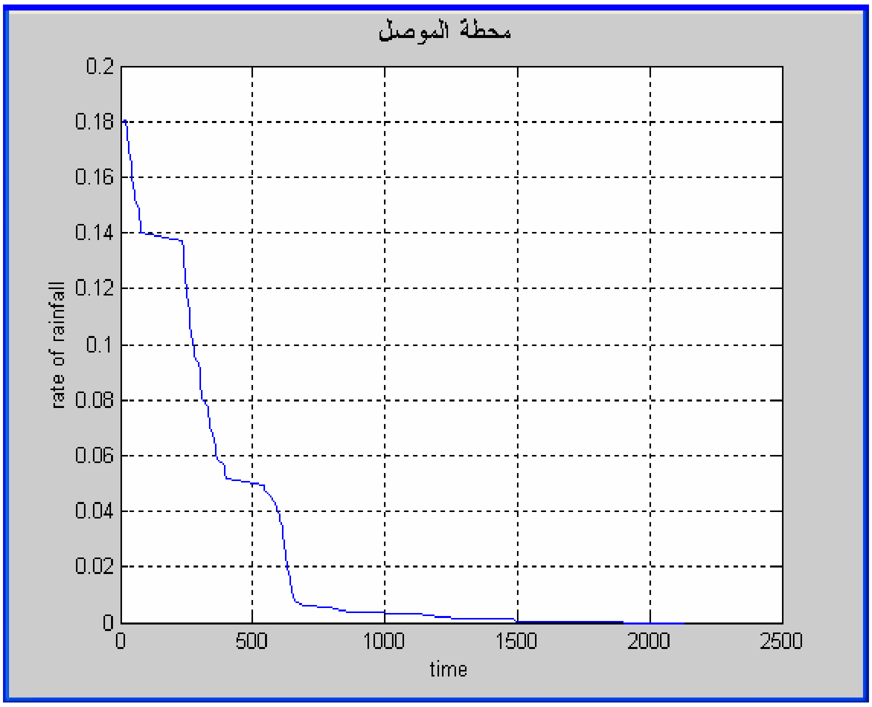






الشكل (1): كمية الأمطار اليومية الساقطة (ملم) في محطة الموصل.

إن الطريقة المقترحة للتقدير تتم بمرحلتين, وكما بينا في فقرات سابقة فـي المرحلـة الأولى يتم رسم المقدر أللبي للمعدل اليومي لحدوث الأمطار في المحطة قيد الدراسة. وقد تـم إعداد برنامج خاص باللّغة لبرمجية MATLAB v.7 لإيجاد المقدر أللبي للمعـدل اليـومي لحدوث الأمطار في محطة الموصل وهو كما موضح في الشكل (2) ، وتَجدر الملاحظة إلـى إن النافذة التي تم استخدامها لتقدير المقدر ألّلبي هي النافذة المثلثية (نافذة بارتليت) المعروفـة بكفاءتها, أما معلمة سعة القيد المستخدمة $b(n)$ فكانت الانحراف المعياري للفترات بين حدوث الحوادث.



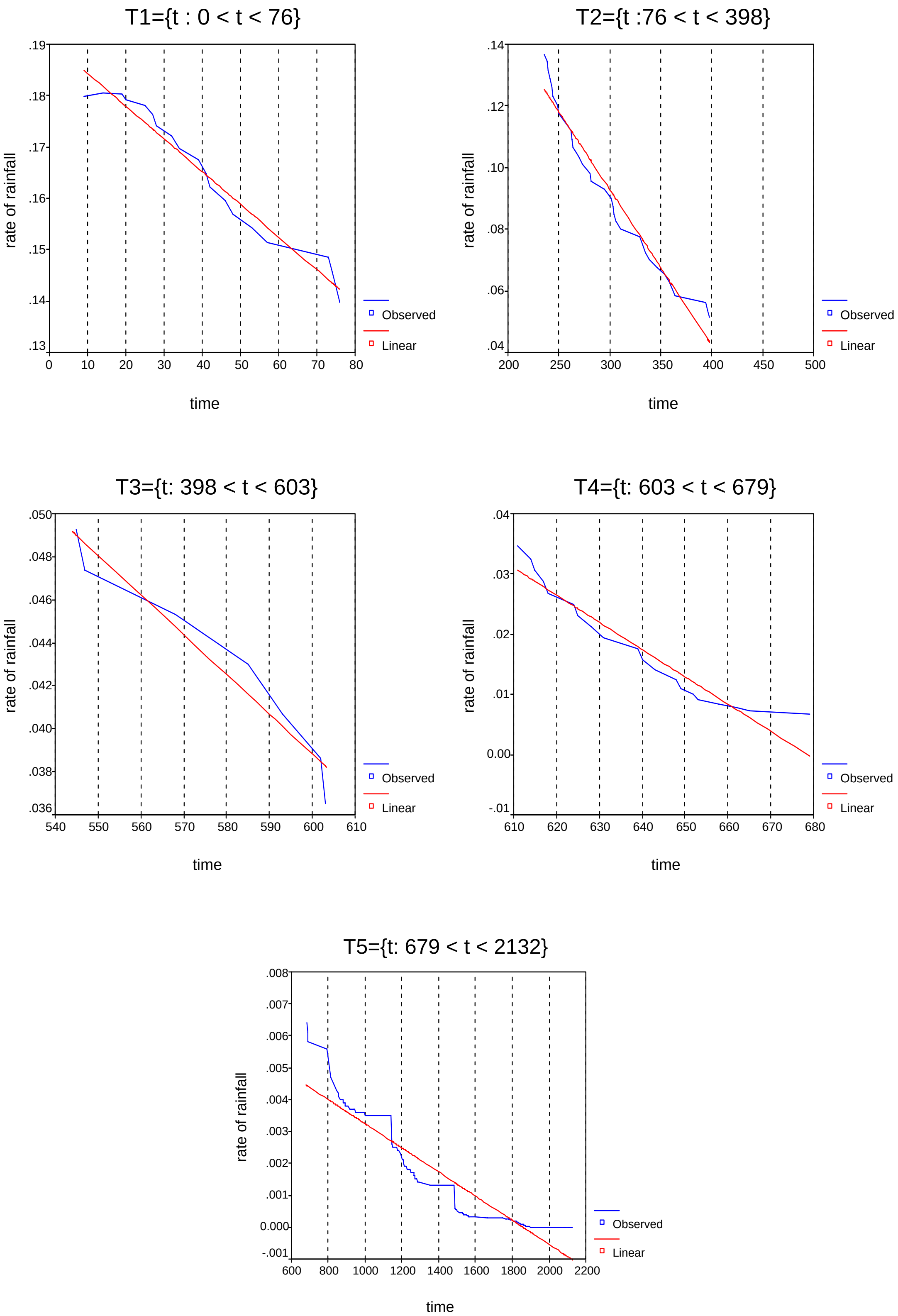
الشكل(2): المقدّر ألّلبي $\hat{\lambda}^{(1)}(t)$ للمعدل اليومي لسقوط الأمطار في محطة الموصل.

أما المرحلة الثانية من التقـدير فيـتم فيهـا تقطيـع المقـدر الـذي تـم الحـصول عليه في المرحلة الأولـى بحكمـة للحـصول علـى مقـدرات القطـع الحكيمـة الخطيـة (Piecewise Linear Estimators) فضلاً عن المعادلة الخطية الملائمة للمقدر في كل فترة من الفترات الجزئية.

من الشكل (2) يمكن إيجاد مقدر القطع الحكيمة للمعدل اليومي لحدوث الأمطار فـي محطة الموصل وذلك من خلال ملاءَمة نموذج انحداري خطي في كل قطعـة مـن القطـع الحكيمة لكي نحصل على مقدر القطع الحكيمة الخطية الآتي والذي تم إيجاده باستخدام النظـام الجاهزSPSS:

$$\hat{\lambda}^{(2)}(t) = \begin{cases} 0.1907 - 0.000600\,t & ; \quad 0 < t \le 76 \\ 0.2443 - 0.000500\,t & ; \quad 76 < t \le 398 \\ 0.1498 - 0.000200\,t & ; \quad 398 < t \le 603 \\ 0.3073 - 0.000500\,t & ; \quad 603 < t \le 679 \\ 0.0070 - 0.000004\,t & ; \quad 679 < t \le 2132 \end{cases} \qquad \ldots\ldots (6)$$

والشكل (3) يبين مقدر القطع الحكيمة للمعدل اليومي لحدوث الأمطـار فـي محطـة الموصل. إذ أن المنحنيات المتعرجة في الشكل تبين المقدر اللبي، فـي حـين أن الخطـوط المستقيمة توضح مقدرات القطع الحكيمة، ولكل قطعة على حده والموضحة معادلاتهـا فـي الصيغ (6).



الشكل(3): مقدّر القطع الحكيمة $\hat{\lambda}^{(2)}(t)$ للمعدل اليومي لحدوث الأمطار في محطة الموصل.

6. المناقشة:

يلاحظ من الشكل (2) أن اتجاه العملية باتجاه التناقص, مما يـدل علـى أن المعـدل اليومي لحدوث الأمطار في محطة الموصل يتناقص بمرور الزمن. إن هذه الطريقة تزودنـا بمقدر للمعدل اليومي لحدوث للأمطار للمحطة قيد الدراسة وبفترات زمنيـة محـددة بـشكل منفصل عن بعضها البعض, هذه الطريقة أعطت تقديرات دقيقة لكل مرحلة من مراحل المعدل اليومي لحدوث الأمطار المختلفة مما يعزز عدم تجانس العملية المطرية قيد الدراسـة, كمـا يعزز سبب استخدام هذه الطريقة مع العمليات النقطية غير المتجانسة.

ولغرض اختبار كفاءة الطريقة المقترحة فقد قام الباحث الأول في أطروحته للدكتوراه بأخذ شكلين من الأشكال المعروفة للمعلمة $\lambda(t)$. أمـا الـشكل الأول فهـو الـذي اقترحـه الباحثـان [Cox and Lewis, 1966] والـذي وصـف $\lambda(t)$ بأنّهـا دالـة لاخطيـة (Non-Linear Function) أو أُسية, والتي سميت (Cox Function) نسبةً إلـى الباحـث الذي اقترحها والتي لها الشكل الآتي:

$$\lambda(t) = e^{(a+bt)} \quad ; \qquad 0 < t \le t_0 \qquad \dots\dots (7)$$

إذ إن t_0 هو زمن حدوث الحادثة الأخيرة، وأن a ,b هما معلمتا الدالة الأسيه يمكن تقديرهما باستخدام طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method). إن دالة الإمكـان للعملية البواسونية غير المتجانسة ذات المعدل الزمني للحدوث المعرف بالصيغة الأُسية هـي كما يأتي:

$$L = e^{(na + b\sum_{i=1}^{n} t_i)} \exp[-e^a (e^{bt_0} - 1)/b] \qquad \dots\dots (8)$$

وعليه فإن مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة a عندما تكون b معلومة هو:

$$\hat{a} = \ln\left(\frac{nb}{e^{bt_0} - 1}\right) \qquad \dots\dots (9)$$

أما بخصوص المعلمة b فلا يمكن إيجاد مقدر الإمكان الأعظم لكون المعادلة الناجمـة غير خطية، لذا تم استخدام الطرائق العددية (Numerical Methods) لهذا الغرض. وبعـد إجراء بعض العمليات الرياضية تم الحصول على المقدر التعاقبي للمعلمة b كما يأتي:

$$\hat{b}_i = \hat{b}_{i-1} - [\frac{n}{\hat{b}_{i-1}} - \frac{nt_0}{(1-e^{-\hat{b}_{i-1}t_0})} + \sum t_i][-\frac{n}{\hat{b}_{i-1}^2} - \frac{nt_0^2 e^{-\hat{b}_{i-1}t_0}}{(1-e^{-\hat{b}_{i-1}t_0})^2}]^{-1},\ 0 < t_i \le t_0 \ldots \ldots (10)$$

أما الشكل الثاني فهو الذي اقترحه الباحث [Duane, 1964] والذي وصف $\lambda(t)$ بدالة وايبل (Weibull Function) ، والشكل الرياضي لهذه الدالة هو كما يأتي:

$$\lambda(t) = \beta\lambda t^{\beta-1} \quad ; \quad t, \lambda, \beta > 0 \qquad \ldots\ldots(11)$$

إذ إن β ، λ هما معلمتا دالة وايبل يمكن تقديرهما باستخدام طريقة الإمكان الأعظم أو طريقة المربعات الصغرى (Minimum Least Squares Method). إن دالة الإمكان الأعظم في عملية وايبل (Weibull Process) هي بالشكل الآتي:

$$L = \beta^n \lambda^n e^{-\lambda t_0^{\beta}} \prod_{i=1}^{n} t_i^{\beta-1} \quad , \quad 0 < t_i \le t_0 \qquad \ldots\ldots(12)$$

وبذلك يكون مقدر الإمكان الأعظم للمعلمتين β ، λ كما يأتي:

$$\hat{\beta} = \frac{n}{n \ln t_0 - \sum_{i=1}^{n} \ln t_i} \qquad \ldots\ldots(13)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{t_0^{\beta}} \qquad \ldots\ldots(14)$$

وبعد تطبيق المقدرات السابقة على البيانات قيد الدراسة تم الحصول علـى المقـدرين الآتيين:

$$\hat{\lambda}_{cox}(t) = e^{-(2.1051+0.0001927\,t)} \quad ; \quad 0 < t \le 2132 \qquad \ldots(15)$$

$$\hat{\lambda}_{wei}(t) = 0.8718 * 0.2669\, t^{0.8718-1} \quad ; \quad 0 < t \le 2132 \qquad \ldots(16)$$

ولغرض إجراء المقارنة بين المقدرات الثلاثة للمعدل اليومي لحدوث الأمطـار فـي محطة الموصل للمعلمة $\hat{\lambda}(t)$، وهم $\hat{\lambda}_{cox}(t)$ و $\hat{\lambda}_{wei}(t)$ والمقدر $\hat{\lambda}^{(2)}(t)$ الـذي سـوف نرمز له بالرمز $\hat{\lambda}_{pwl}(t)$، فقد تم حساب معدل مربـع الخطـأ (Mean Square Error) وذلك باعتبار أن المقدر أللبي $\hat{\lambda}^{(1)}(t)$ هو الأساس للمقارنـة باعتبـاره مقـدراً لامعلميـاً.

فلو كانت $t'_1, t'_2, \ldots, t'_k$ تمثل النقاط الزمنية التي تم إيجاد قيم المقدر أللبي عندها، فإن مربع معدل الخطأ يكون بالشكل الآتي:

$$MSE_{cox} = k^{-1}\sum_{j=1}^{k}\left[\hat{\lambda}_{cox}(t_j) - \hat{\lambda}^{(1)}(t_j)\right]^2 \quad \ldots (17)$$

$$MSE_{wei} = k^{-1}\sum_{j=1}^{k}\left[\hat{\lambda}_{wei}(t_j) - \hat{\lambda}^{(1)}(t_j)\right]^2 \quad \ldots (18)$$

$$MSE_{pwl} = k^{-1}\sum_{j=1}^{k}\left[\hat{\lambda}_{pwl}(t_j) - \hat{\lambda}^{(1)}(t_j)\right]^2 \quad \ldots (19)$$

إذ إن MSE_{cox} ، MSE_{wei} ، MSE_{pwl} ترمز إلى معدل مربع الخطأ للمقدرات $\hat{\lambda}_{cox}(t)$ و $\hat{\lambda}_{wei}(t)$ و $\hat{\lambda}_{pwl}(t)$ على التوالي. وبعد استكمال الإجراءات الحسابية تم الحصول على النتائج الآتية:

$$MSE_{cox} = 0.007045$$
$$MSE_{wei} = 0.006703$$
$$MSE_{pwl} = 0.000048$$

من هذه النتائج يتضح بأن المقدرين $\hat{\lambda}_{cox}(t)$ و $\hat{\lambda}_{wei}(t)$ يعطيان معدلي مربع خطأ متقاربين. أما مقدر القطع الحكيمة الخطية $\hat{\lambda}_{pwl}(t)$ فيعطي معدل مربع خطأ قليلا جداً مقارنةً بالمقدرين الآخرين مما يؤكد دقة هذا المقدر وكفاءته.

المصادر

1. ذنون, باسل يونس, (1998), "**التقدير أللبي: أسلوب بياني في التقدير الإحصائي**". مجلة علوم الرافدين, المجلد 9, العدد 1, ص 89-99.
2. السليمان، مثنى صبحي, (2006), "**التحليل الإحصائي للعملية البواسونية غير المتجانسة مع تطبيق**" ، أطروحة دكتوراه غير منشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات, جامعة الموصل.
3. Bowman, A. W. and Azzalini, A. (1997),"**Applied Smoothing Techniques for Analysis: The Kernel Approach with S-PLUS Illustrations**". Oxford University Press.
4. Choi, E. and Hall, P. (1998),"**Non parametric approach to analysis of space-time data on earthquake occurrence**". Journal of Computational and Graphical Statistics, 8, 733-748.
5. Cox, D. R., and Lewis, P. A. (1966),"**Statistical Analysis of Series of Events**". Chapman and Hall, London, United Kingdom.

6. Duane, J. T. (1964),"**Learning curve approach to reliability monitoring**". IEEE Transaction on Aerospace, As-vol(2), 563-566.
7. Helmers, R. and Mangku, I. W. (2000),"**Statistical estimation of Poisson intensity functions**". Centrum Voor Wiskunde en Informatica Report, PNA-R 9913 Submitted for Publication.
8. Loader, C. (1999),"**Local Regression and Likelihood**". Springer, New York.
9. Peng, R. D. (2003),"**Application of multi-dimensional point procss Methodology to wildfire hazard assessment**". Ph. D., University of California, Los Angeles.
10. Thanoon, B. Y. (1994),"**A graphical approach of estimating of functional form of the relationship between two random variables or time series**". Journal Education and Science, 15, 337-345.
11. Wand, M. P., and Jones, M.C. (1995),"**Kernel Smoothing**". Chapman and Hall, London.
12. Zhuang, J., Ogata, Y. and Vere-Jones, D. (2002),"**Stochastic declustering of space-time earthquake occurrences**". Journal of the American Statistical Association, 97, 369-380.