المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (17) 2010
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات -الاحصاء والمعلوماتية
ص ص [57-64]

حول الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة

عامر عبد الإله محمد* دعاء فائز عبد ا **

الملخص

تبعاً لماثيووكابريرا – رودريكث وكابريرا – محمد عرفنا الجبور الأولية المضروبة كليا الخاصة . باستخدام تلك الجبور تم تحسين النتيجة العائدة لـ كابريرا – محمد التي تنص على انه إذا كان A جبرا حقيقياً أولياً مضروباً كلياً فان الانغلاق المركزي لـ A يكون جبرا معقداً أولياً مضروباً كلياً .

وأيضاً حددنا علاقة الجبور الأولية المضروبة كليا الخاصة بالجبور التي سبقتها وبالأخص الجبور الأولية المضروبة كليا والجبور الأولية المميزة والجبور الأولية كلياً .

On Particular Totally Multiplicatively Prime Algebras

Abstract

Following Mathiew, Cabrera-Rodriguez and Cabera-Mohammed we define particular totally multiplicatively prime algebra. Using these algebras we improved the result due to Cabera-Mohammed which stated that, if A is a real totally multiplicatively prime algebra, than the central closure of A is a complex totally multiplicatively prime algebra.

Also we explain the relation between particular totally multiplicatively prime algebra with prior algebra specifically totally multiplicatively prime algebras ultraprime algebras and totally prime algebras.

---

*أستاذ مساعد/ قسم الرياضيات / كلية التربية
**مدرس مساعد/ قسم الرياضيات / كلية التربية

تاريخ التسلم :2009/7/1 ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ تاريخ القبول : 6 /12 /2009

1. مقدمة وتمهيد :

أول من درس التقوية التحليلية للخصائص الجبرية هو ماثيو في أطروحته للـدكتوراه [6] . نقصد بالتقوية التحليلية للخصائص الجبرية مثلاً إذا كان A جبراً أولياً بمعنـى أن أي مثاليتين لـ A حاصل ضربهما يساوي صفراً فان احدهما يجب أن تكـون صـفراً . هـذه الخاصية الأولية للجبر تم تمثيلها بدلالة المؤثر الخطي $M_{a,b}$ وكما ياتي :

$$M_{a,b} : A \mapsto A$$
$$x \mapsto M_{a,b}(x) = axb$$

فان A (تجميعي) يكون أولياً إذا وفقط إذا كان $M_{a,b} = 0$ يؤدي إلـى $a = 0$ أو $b = 0$

حيث $(a,b \in A)$ أستطاع ماثيو أن يستخدم المؤثر الخطي $M_{a,b}$ للتقوية التحليلية لخاصية الأولي للجبر في حالة كون A جبراً معيارياً وكما ياتي :

يقال للجبر التجميعي المعياري A بأنه جبر أولي مميز إذا وجد عدد ثابـت موجـب $K > 0$ بحيث

$$K\|a\|\|b\| \le \|M_{a,b}\| \qquad \text{a,b} \in \text{A} \quad \ldots(1)$$

من السهل معرفة كون A أولياً مباشرة من العلاقة (1) وكما أن العلاقة (1) تغنينـا عن استخدام القوة المميزة في تعريف الجبر الأولي المميز أنظر [7] . ظهور الجبور الأولية المميزة أثارت اهتمام الباحثين وأولهم ماثيو في دراسات متميزة لمعرفة جبـور مهمـة ذوات تاريخ مثل جبر $H^* -$, جبر $C^* -$, $L_p(H)$, $C_0(H)$, $C_p(H)$ في كونها هـل هي جبور أولية مميزة ؟ أستطاع ماثيو في [7] أن يثبت أن جبر $C^* -$ أولي يكـون أوليـاً مميزاً بثابت $K = 1$.

نذكر بعض الدراسات حول الجبور الأولية المميزة مثل [2] ,[8] ,[9] السؤال الـذي يتبادر إلى ذهن الباحثين هل أن الخاصية الأولية للجبور لا تعتمد على كون الجبر تجميعياً أو غير تجميعي؟ إلا انه لا يمكن استخدام المؤثر الخطي $M_{a,b}$ لإعطاء الخاصية الأولية للجبر في حالة كونه غير تجميعي لذلك لجأ الباحثون إلى إيجاد بديل للمؤثر $M_{a,b}$ والمؤثر البـديل هو $N_{a,b}$ ومعرف بالشكل الآتي :

$$N_{a,b} : M(A) \times M(A) \mapsto A$$
$$(F,G) \mapsto N_{a,b}(F,G) = F(a).G(b)$$

من السهولة معرفة أن الجبر A (ليس بالضرورة تجميعيا) هو أولي إذا وفقط إذا كان $N_{a,b}=0$ يؤدي إلى $a=0$ أو $b=0$. وأستطاع كل من كابريرا – رودريكث [4] من إعطاء التقوية التحليلية للخاصية الأولية للجبر غير التجميعي بدلالة المؤثر الخطي $N_{a,b}$ وكما ياتي :

يقال للجبر المعياري A انه جبر أولي كلي(Totally prime algebra) إذا وجد عدد ثابت موجب $K>0$ بحيث أن

$$K\|a\|\|b\|\le\|N_{a,b}\| \quad \ldots(2)$$

ان ظهور الجبور الأولية كلياً أيضاً أثار اهتمام الباحثين في دراسات متميزة نذكر منها [3] [4] [5] . استطاع كل من كابريرا – رودريكث في [4] أن يثبتا أن كل الجبور الأولية المميزة تكون أولية كلياً وكذلك أن كل الجبور الأولية كلياً التجميعية وغير التجميعية تكون مغلقة مركزياً . كما استطاع كل من الباحثين كابريرا ومحمد في [1] أن يعرفا الجبور الأولية المضروبة التي ظهرت في دراستهما لعلاقة المركز الموسع للجبر بالمركز الموسع لجبر المضروبات له وكما ياتي:

يقال للجبر A بأنه أولي مضروب (Multiplicatively prime) إذا كان كل من A و$M(A)$ جبوراً أولية .

وقد احتاج الباحثان إلى مؤثر خطي يكافئ الصفة الجبرية (الأولي المضروب) واستطاعا أن يعطيا الخاصية الاولية المضروب للجبر بدلالة المؤثر الخطي $W_{F,a}$ على غرار ما فعله كابريرا – رودريكث والمعرف بالشكل الآتي:

$$W_{F,a}:M(A)\mapsto A$$
$$T\mapsto W_{F,a}(T)=FT(a)$$

استطاع كابريرا – محمد في ([1 ، قضية 1]) أن يثبتا أن A هو جبر أولي مضروب إذا وفقط إذا كان $W_{F,a}=0$ يؤدي إلى $F=0$ أو $a=0$ (حيث $a\in A, F\in M(A)$) .

كذلك استخدم كابريرا – محمد في [2] المؤثر الخطي $W_{F,a}$ للتقوية التحليلية لخاصية الأولي المضروب للجبر في حالة كون A جبراً معيارياً وكما ياتي :

يقال للجبر المعياري A انه جبر أولي مضروب كلي إذا وجد عدد ثابت موجب $K>0$ بحيث أن :

$$K\|F\|\|a\|\le\|W_{F,b}\| \quad \ldots(3)$$

وقد تمت دراسة الجبور الأولية المضروبة كلياً بشكل تفصيلي في أطروحة الدكتوراه لـ محمد [2] .وكذلك البحوث المشتركة مع كابريرا نذكر منها [1],[2],[3].

في عملنا هذا استطعنا أن نقدم جبوراً معيارية وقد أطلقنا عليها اسم الجبـور الأوليـة المضروبة كليا الخاصة وهي تعتبر جزء من الجبور الأولية المضروبة كلياً .

وكذلك تمكنا من تحديد علاقة الجبور الأولية المضروبة كليا الخاصة بالجبور الأوليـة المضروبة كليا (القضية 2-5) وكذلك علاقتها بالجبور الأولية المميزة (القضية 2-6).

وأخيراً علاقة تلك الجبور بالجبور الأولية الكلية (القضية 2-8) .

النتيجة الأساسية التي حصلنا عليها انه إذا كان A جبراً حقيقياً أولياً مـضروباً كليـاً خاصاً فان الانغلاق المركزي لـ A هو جبر معقد أولي مضروب كلي (المبرهنة 2-9) .

2. النتائج الأساسية Fundamental Results :

في هذه الفقرة سنقدم الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة وعلاقتها بالجبور التـي سبقتها ونبدأ بالمبرهنات والقضايا الآتية :

2-1 قضية

كل الجبور الأولية المضروبة كلياً هي جبور أولية كلياً .

البرهان :

(انظر [2 ، قضية 2.2]) .

2-2 مبرهنة

ليكن $(A,\|.\|)$ جبراً حقيقيا أولياً مضروباً كلياً فان المركز الموسع لـ A يساوي أما $\boldsymbol{R}$ أو $\boldsymbol{C}$. إذا كان $C(A)=\boldsymbol{C}$ فانه يوجد معيار جبري معقد $|.|$ علـى الانغـلاق المركـزي $Q(A)$ لـ A بحيث أن $(Q(A)\ ,\ |.|)$ هو جبر أولـي مـضروب كلـي والاحتـواءات $(A,\|.\|)$ في $(Q(A)\ ,\ |.|)$ و$(M(A),\|.\|)$ في $(M(Q(A))\ ,\ |.|)$ تكون تبولوجية .

البرهان :

(انظر [2 ، مبرهنة 3.2]) .

2-3 قضية [2]

ليكن A جبراً معقداً معيارياً وB جبراً حقيقياً معيارياً مأخوذاً من A بواسطة قيـد الأعداد عندئذ A جبر أولي مضروب كلي إذا وفقط إذا كان B جبراً أولياً مضروباً كلياً .

2-4 تعريف الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة

ليكن $(A,\|.\|)$ جبراً معيارياً وليكن β جبراً جزئيـاً مـن $BL(A)$ يحـوي جبـر المضروبات $M(A)$ لـ A يقال بان A هو جبر أولي مضروب كلي خـاص اختـصاراً $(\beta - T.M.P)$ إذا وجد عدد ثابت موجب $K > 0$ بحيث إن :

$$K\|F\|\|a\| \leq \|W_{F,a}\| \qquad \forall \ F \in \beta \quad , a \in A$$

حيث إن

$$\|F\| \qquad (The\ operator\ norm\ of\ F)$$

و

$$\|W_{F,a}\| \qquad (The\ operator\ norm\ of\ W_{F,a})$$

الآن ، بالإمكان تحديد علاقة الجبور الأولية المضروبة كليا الخاصة بـالجبور التـي سبقتها وكالاتي :

2-5 قضية مساعدة

كل الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة هي جبور أولية مضروبة كلياً .

البرهان : مباشر .

2-6 قضية

ليكن A جبراً معيارياً ، عندئذٍ

إذا كان A جبراً أولياً مضروباً كلياً خاصاً فان β تكون أولياً مميزاً .

البرهان :

نفرض أن A هو جبر أولي مضروب كلي خاص، أي انـه يوجـد عـدد موجـب $K > 0$ بحيث أن:

$$K\|F\|\|a\| \leq \|W_{F,a}\| \qquad \forall \ F \in \beta \quad , a \in A$$

ليكن $a \in A$. لكل $F, G \in \beta$ و$T \in M(A)$ نحصل على

$$\begin{aligned} \|W_{F,G(a)}(T)\| &= \|FTG(a)\| \\ &\leq \|FTG\|\|a\| \\ &= \|M_{F,G}(T)\|\|a\| \\ &\leq \|M_{F,G}\|\|T\|\|a\| \end{aligned}$$

الآن ، بأخذ $\sup_{\|T\|=1}$ للطرفين نحصل على

$$\|W_{F,G(a)}\| \leq \|M_{F,G}\|\|a\|$$

بما أن A هو جبر أولي مضروب كلي خاص فان

$$K\|F\|\|G(a)\| \le \|M_{F,G}\|\|a\|$$

الآن ، بأخذ $\sup_{\|a\|=1}$ للطرفين نحصل على

$$K\|F\|\|G\| \le \|M_{F,G}\| \qquad \forall\ F,G \in \beta$$

وعليه نستنتج أن β أولي مميز .

قبل البدء ببرهان المبرهنة(2-9) لا بد من ذكر بعض القضايا التي تمكننا من إظهار البرهان بشكل واضح وعليه نبدأ بالقضية الآتية :

2-7 قضية [2]

ليكن A جبر أولياً مضروباً كلياً خاصاً ، ونفرض أن K عدد موجب بحيث أن :

$$K\|F\|\|a\| \le \|W_{F,a}\| \qquad \forall\ F \in \beta \quad , a \in A$$

عندئذٍ

1. $K\|F\| \le \|F^U\| \le \|F\|$

لكل $F \in \beta$ و U مثالية غير صفرية لـ A .

2. $K\|a\| \le \|E_a^{\wp}\| \le \|a\|$

لكل $a \in A$ و$\wp$ مثالية غير صفرية لـ $M(A)$.

3. $K^2\|F\|\|a\| \le \|W_{F,a}^{\wp}\|$

لكل $F \in \beta$, $a \in A$ و$\wp$ مثالية غير صفرية لـ $M(A)$.

الآن ، يمكننا تقديم النتيجة الأساسية لهذا البحث .

2-8 قضية

كل الجبور الأولية المضروبة كلياً الخاصة هي جبور أولية كلياً .

البرهان :

نفرض أن A هو جبر أولي مضروب كلي خاص ، حسب القضية المساعدة (2-5) نستنتج أن $\underset{\sim}{A}$ هو جبر أولي مضروب كلي وحسب قضية (2-1) نستنتج أيضاً أن A هو جبر أولي كلي . وبهذا ينتهي البرهان

■

النتيجة الأساسية لهذا البحث تتلخص في المبرهنة الآتية:

2-9 مبرهنة

ليكن $(A,\|.\|)$ جبراً حقيقياً أولياً مضروباً كلياً خاصاً فان المركز الموسع لـ A يساوي إما $\boldsymbol{R}$ أو $\boldsymbol{C}$. إذا كان $C(A)=\boldsymbol{C}$ فانه يوجد معيار جبري معقد $|.|$ على الانغلاق المركزي $Q(A)$ لـ A بحيث أن $(Q(A)\ ,\ |.|)$ هو جبر أولي مضروب كلي والاحتواءات $(A,\|.\|)$ في $(Q(A)\ ,\ |.|)$ و$(M(A),\|.\|)$ في $(M(Q(A))\ ,\ |.|)$ تكون تبولوجية .

البرهان :

حسب القضية المساعدة (2-5) نستنتج أن A هو جبر أولي مضروب كلي . وبتطبيق المبرهنة (2-2) نحصل على $(Q(A)\ ,\ |.|)$ يكون جبرا أولياً مضروبا كليا . وان الاحتواءات $(A,\|.\|)$ في $(Q(A)\ ,\ |.|)$ و$(M(A),\|.\|)$ في $(M(Q(A))\ ,\ |.|)$ تكون تبولوجية .

2-10 قضية

ليكن A جبراً معقداً معيارياً و B جبراً حقيقياً معيارياً مأخوذاً من A بواسطة قيد الأعداد عندئذ A هو جبر أولي مضروب كلي خاص إذا وفقط إذا كان B جبراً أولياً مضروباً كلياً خاصاً .

البرهان :

مباشر بتطبيق القضية المساعدة (2-5) . وقضية (2-3) نحصل على المطلوب .

وبهذا ينتهي البرهان ■

المصادر

[1] Cabrera, M., Mohammed, A.A. "*Extended centroid and central closure of The multiplication algebra*", comm. Algebra 27 (12) (1999), 5723-5736.

[2] Cabrera, M., Mohammed, A.A. "*Totally multiplicatively prime algebras*", proc. Royal Soc. Edinburgh 132 A (2002), 1145-1162.

[3] Cabrera, M., Mohammed, A.A. "*Algebras of quotients with bounded evaluation of a normed prime algebra*", J. Oper. Theory, Romania, (2003).

[4] Cabrera, M., Rodriguez, A. "*Nonassociative ultraprime normed algebras*", Quart. J. Math. Oxford (2) 43 (1992), 1-7.

[5] Cabrera, M., Rodriguez, A. "*Non-degenerately ultraprime Jordan-Banach algebras : A Zel'manovian treatment*", Proc. London Math. Soc. 69 (1994), 567-604.

[6] Mathieu, M. **"*Applications of ultraprime Banach algebras in The Theory of elementary operators*",** Phd. Tubingen (1986).

[7] Mathieu, M. "*Rings of quotients of ultraprime Banach algebras with applications to elementary operators*", Proc. Centre Math. Anal. Austral Nat. Univ. 21 (1989), 297-317.

[8] Mathieu, M. "*The symmetric algebra of quotients of an ultraprime Banach algebras*", J. Austral. Math. Soc. (Series A) 50 (1991), 75-87.

[9] Murphy,G.J. **"*C*-algebras and operator Theory*",** Academic press, Inc., Boston, MA. (1990).