المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (17) 2010
عدد خاص بوقائع المؤتمر العلمي الثاني للرياضيات-الاحصاءوالمعلوماتية
ص ص [65-82]

الحل العددي وتحليل الأستقرارية العددية لمعادلة Korteweg-de Vries-Burger

إخلاص سعد ا الراوي*   المعتصم عبد المحسن البكر**

الملخص

تم عرض الحل العددي لمعادلة Korteweg-de Vries-Burger (KdV-B) باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية ، الطريقة الصريحة (explicit scheme) وطريقة Crank-Nicholson. دقة الحلول المحسوبة اختبرت بالمقارنة مع الحل المضبوط باستخدام مثال ، وقد تبين أن الطريقة الصريحة هي الأسهل بينما طريقة Crank-Nicholson أكثر دقة وأسرع تقارب . كذلك تمت دراسة الأستقرارية العددية للطريقتين باستخدام طريقة Fourier(Von Neumann) إذ تبين أن الطريقة الصريحة مستقرة تحت الشرط $k \le (vh^2 / 2(v^2 + \frac{\mu^2}{h^2}))$ بينما طريقة Crank-Nicholson مستقرة دون شرط.

Numerical Solution and Stability Analysis of Korteweg-de Vries-Burger Equation

ABSTRACT

Numerical Solution of Korteweg-de Vries-Burger (KdV-B) equation is presented using two finite difference methods ,the explicit scheme and Crank-Nicholson scheme. The accuracy of computed solutions is examined by comparison with analytical solution using example , and it has been found that the explicit scheme is simpler while the Crank-Nicholson is more accurate and has faster convergent . Also , the stability analysis of the two methods by using Fourier (Von Neumann) method has been done and the result was showed that the explicit scheme is stable under the condition $k \le (vh^2 / 2(v^2 + \frac{\mu^2}{h^2}))$ and the Crank-Nicholson is unconditionally stable.

---

* استاذ مساعد/ قسم الرياضيات/كلية علوم الحاسبات والرياضيات
** مدرس/ قسم الرياضيات/كلية علوم الحاسبات والرياضيات

تاريخ التسلم :2009/7/1 ـــــــــــــــــــــــــــ تاريخ القبول : 6 /12 /2009

1. المقدمة:

درس العديد من الباحثين معادلة Korteweg-de Vries–Burger وتكتب اختـصارا (KdV-B) . تشكل هذه المعادلـة نمـوذج الانتـشار (dispersion) والتبـدد (أو التـشتيت dissipation) وغير الخطي[2] . من المعروف جيداً أن الكثير من الظواهر الفيزيائية الطبيعية يمكن أن توصف باستخدام هذه المعادلة . من الأمثلة التطبيقية على المعادلـة، شـروط سـلوك الموجات الطويلة في الماء والموجات الضحلة في البلازما . كما أنها تلائم نمط موجة لا خطية لمائع في أنبوب مطاطي ، والمائع مضطرب بفعل فقاعات صغيرة تتحرك بداخله. هذه المعادلة تعتبر تعميما ذا بعد واحد للوصف النموذجي لحقول السرعة والكثافة اللذين يأخذان في الحسبان قوة الضغطِ فضلا عن اللزوجةِ والتفرق، قد تكون معادلة KdV-B أداة أكثر مرونة للفيزيائيين من معادلة Burger [6]. في[10] اعتبرنا مسألة الإستقرار الأسي الـشامل باسـتخدام حـدود التغذية الإسترجاعية لمعادلة KdV-Burger على الفترة [0,1]. في[1] أقترح الباحث قـانون سيطرة أكثر دقة والذي أوجد الحل وأثبت الوجود و الأستقرارية لحل حـدود الـسيطرة النـاتج لمعادلة KdV-Burger . في [3] قدم الباحث طريقة Decomposition جديدة نسبياً لإيجـاد الحلول الصريحة والحلول العددية لكل من معادلة KdV ، معادلة Burger's ومعادلة KdV-B . في [6] كرس الباحثون دراسة معادلة KdV-B وتطبيق طريقة الفروقات المنتهية مع الشبكة المتغيرة مع طريقة شبه التحليلية لـ Adomain decomposition . فـي[2] قـدم الباحـث حلولا عددية لمعادلة KdV-Burger باستخدام متعددات حدود Bernstein المعدلة .

في هذا البحث قمنا بحل معادلة KdV-Burger باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية هما الطريقة الصريحة وطريقة Crank-Nicholson ستتم معالجة الطريقتين لإيجـاد الحل لهذه المعادلة بسبب إحتوائها على المشتقة الثالثة في حدودها ومقارنة النتـائج مـع الحـل التحليلي. كما سيتم دراسة تحليل إستقرارية الحل العددي لكل من الطريقتين.

2. النموذج الرياضي:

إن صيغة معادلة Korteweg-de Vries – Burger تكون بالشكل الأتي: [8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad ...(1)$$

حيث أن μ, ν, ε معاملات ثوابت والشرط الابتدائي هو

$$u(x,0) = u_0(x)$$

والشروط الحدودية هي

$$\left.\begin{aligned} &u(a,t)=\beta_1 \;,\; u(b,t)=\beta_2 && ,t\ge 0\\ &u_x(a,t)=u_x(b,t)=0 && ,t\ge 0\\ &u_{xx}(a,t)=u_{xx}(b,t)=0 && ,t\ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad ...(2)$$

وأن $u_0(x)$ هي دالة مقيدة .والمعادلة (1) تمثل الشروط الحدودية عند نهايتي الفترة [a,b] المراد إيجاد الحل العددي عندها. الحد الثاني من المعادلة (1) يمثل الحد غير الخطي ، والحد الثالث يمثل خاصية الإنتشار والأخير يمثل التفريق أو التبديد. وكحالات محددة لمعادلة KdV-B تصبح معادلة KdV عندما تكون $v\to 0$ ومعادلة Burger عندما $\mu\to 0$.

3. الحل العددي:

كون المعادلة تحوي في حدودها المشتقة الثالثة لذلك سيتم أتباع أسلوب جديد في الحل العددي وسنحتاج إلى استخدام المعادلات الفرقية الاتية:

أ. التقريبات المركزية

$$u_x(x_i,y_j)=\frac{u_{i+1}^j-u_{i-1}^j}{2.h} \qquad ...(3)$$

$$u_{xx}(x_i,y_j)=\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2} \qquad ...(4)$$

$$u_{xxx}(x_i,y_j)=\frac{u_{i+2}^j-2u_{i+1}^j+2u_{i-1}^j-u_{i-2}^j}{2.h^3} \qquad ...(5)$$

ب. التقريبات العددية التقدمية والخلفية ذوات الرتبة الثانية (تسمى تقريبات عددية من طرف واحد)[4]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-3u_i^j+4u_{i+1}^j-u_{i+2}^j}{2h} \qquad ...(6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3u_i^j-4u_{i-1}^j+u_{i-2}^j}{2h} \qquad ...(7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2u_i^j-5u_{i+1}^j+4u_{i+2}^j-u_{i+3}^j}{h^2} \qquad ...(8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2u_i^j-5u_{i-1}^j+4u_{i-2}^j-u_{i-3}^j}{h^2} \qquad ...(9)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{-5u_i^j+18u_{i+1}^j-24u_{i+2}^j+14u_{i+3}^j-3u_{i+4}^j}{2h^3} \qquad ...(10)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{5u_i^j-18u_{i-1}^j+24u_{i-2}^j-14u_{i-3}^j+3u_{i-4}^j}{2h^3} \qquad ...(11)$$

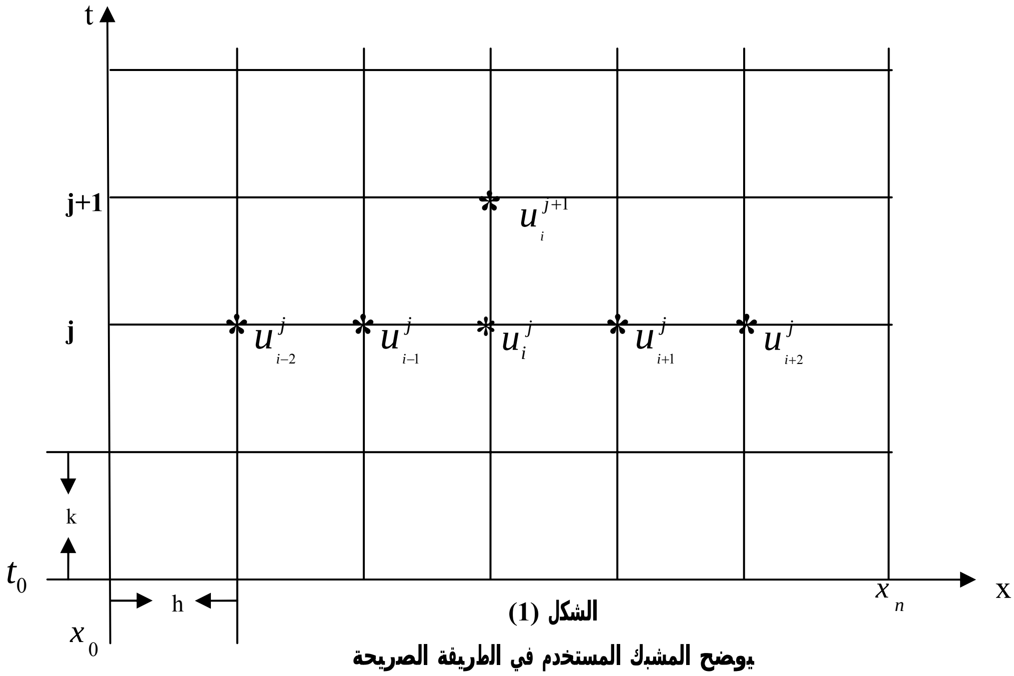
ج. التقريبات المركزية من الرتبة الرابعة $O(h^4)$ لكل من المشتقتين الأولى والثانية :[4]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-u_{i+2}^j+8.u_{i+1}^j-8.u_{i-1}^j+u_{i-2}^j}{12h} \qquad ...(12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-u_{i+2}^j+16.u_{i+1}^j-30.u_i^j+16.u_{i-1}^j-u_{i-2}^j}{12h^2} \qquad ...(13)$$

3-1. اشتقاق صيغة الطريقة الصريحة (Explicit Scheme) لمعادلة KdV-Burger

نقسم المستطيل $R=\{(x,t): a \le x \le b\ ,\ 0 \le t \le c\}$ إلى $m-1$ و $n-1$ من المستطيلات طول ضلع كل منها $(\Delta t = k)$ و $(\Delta x = h)$ [9] وكما في الشكل (1):



الشكل (1)

يوضح المشبك المستخدم في الطريقة الصريحة

تبدأ الحسابات من الصف الأول $t = t_0 = 0$ إذ تحتسب قيم الحل من الشرط الابتدائي للمسألة

$$u(x_i, t_0) = u_0(x) \qquad , \qquad i = 0,1,2,3,\ldots, n$$

ثم يتم توضيح حساب التقريبات لـ $u(x,t)$ عند نقاط المشبك للصفوف الأخرى

$$\{\ u(x_i, t_j): i = 1,2,\ldots, n-1 \ \ ,\ j = 1,2,\ldots, m\}$$

وأسلوب الحل الجديد هو الأتي:

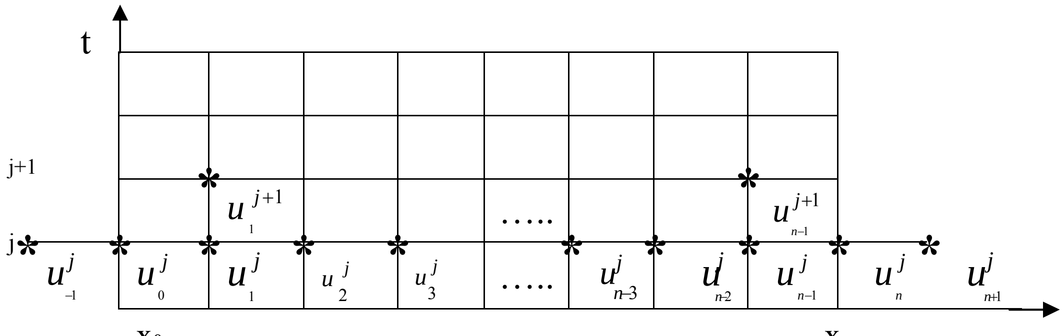
لحساب القيمة التقريبية للحل $u(x_i, t_j)$ عندما i=1 نستخدم المعادلات الفرقية التقدمية (Forward Finite Difference equations) أي نعوض المعادلات(6)، (8) و(10) ونعوضها في المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + \varepsilon u_i^j \left[\frac{-3u_i^j + 4u_{i+1}^j - u_{i+2}^j}{2h}\right] - v\left[\frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2}\right]$$
$$+ \mu\left[\frac{-5u_i^j + 18u_{i+1}^j - 24u_{i+2}^j + 14u_{i+3}^j - 3u_{i+4}^j}{2h^3}\right] = 0$$

بفرض أن $r = k/h^2$ وإعادة ترتيب المعادلة أعلاه يكون لدينا

$$u_i^{j+1} = \left[1 + \frac{3.r.h.\varepsilon}{2}u_i^j + 2rv + \frac{5.r}{2h}\mu\right]u_i^j + \left[-2.r.h.\varepsilon.u_i^j - 2.r.v - \frac{9.r}{h}\mu\right]u_{i+1}^j$$
$$+\left[\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j + 2rv + \frac{12.r}{h}\mu\right]u_{i+2}^j + \left[-rv - 7\frac{r}{h}\mu\right]u_{i+3}^j + \frac{3.r}{2h}\mu\, u_{i+4}^j \qquad \ldots(14)$$

إن المعادلة (14) تمثل تقريب الفروقات المنتهية عند النقطة x_1 من المشبك باستخدام الطريقة الصريحة لمعادلة KdV-Burger.وكما موضح في الشكل (2)



الشكل (2)

يوضح الحل عند النقطة **التي تقع خارج** منطقة الحل عند حساب u_1^{j+1} و u_{n-1}^{j+1} بالطريقة **الصريحة**

ولإيجاد بقية القيم التقريبية $u(x_i,t_j)$ حيث i=2,3,…,n-2 في الصف نفسه نعوض المعادلات (3)،(4) و (5) في المعادلة (1) لنحصل على ما ياتي:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{r.h.\varepsilon}{2}u_i^j\left[u_{i+1}^j - u_{i-1}^j\right] + rv\left[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right] - \frac{r.\mu}{2.h}\left[u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j\right]$$

إذ إن $r = k/h^2$ وبإعادة ترتيب المعادلة أعلاه نحصل على ما ياتي:

$$u_i^{j+1} = \left[rv + \frac{r}{h}\mu\right]u_{i+1}^j - \frac{r}{2h}\mu\, u_{i+2}^j + \left[1 - \frac{rh}{2}\varepsilon\left(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j\right) - 2rv\right]u_i^j + \left[rv - \frac{r}{h}\mu\right]u_{i-1}^j + \frac{r}{2h}\mu\, u_{i-2}^j \quad ...(15)$$

إن المعادلة (15) تمثل تقريب الفروقات المنتهية باستخدام الطريقة الصريحة لمعادلة KdV-Burger حيث يتم حساب الصف j+1 بواسطة القيم المعلومة للصف j عند نقاط المشبك $i = 2,\cdots,n-2$ ، إذ نلاحظ أن القيم المجهولة u_i^{j+1} يتم حسابها بشكل صريح بدلالة القيم المعلومة $u_{i+1}^j, u_{i+2}^j, u_i^j, u_{i-1}^j, u_{i-2}^j$ وكما موضح في الشكل(1).

وأخيراً تحسب القيمة التقريبية $u(x_i,t_j)$ عند i=n-1 لنفس الصف وذلك بتعويض المعادلات الفرقية (7)،(9) و(11) وتعويضها في المعادلة (1) لنحصل على ما ياتي:

$$u_{n-1}^{j+1} = \left[1 - \frac{3.r\,h.\varepsilon}{2}u_{n-1}^j + 2.r\,v - \frac{5.r}{2h}\mu\right]u_{n-1}^j + \left[2.r.h.\varepsilon.u_{n-1}^j - 5.r.v + \frac{9.r.\mu}{h}\right]u_{n-2}^j + \left[-\frac{r\,h}{2}\varepsilon\, u_{n-1}^j + 4.r\,v - \frac{12.r.\mu}{h}\right]u_{n-3}^j + \left[-r.v + \frac{7.r.\mu}{h}\right]u_{n-4}^j - \frac{3.r.\mu}{2h}u_{n-5}^j \quad ...(16)$$

إذ أن $r = k/h^2$

المعادلة (16) تحسب الحل عند النقطة x_{n-1} من المشبك .من ملاحظتنا للتقريب العددي المركزي للمشتقة الثالثة المتمثل بالمعادلة (15) نجد الحلين التقريبيين u_1^{j+1} و u_{n-1}^{j+1} المحسوبين عند العقدتين x_1 و x_{n-1} من نقاط المشبك على التوالي يحويان قيما عند نقاط تقع خارج حدود

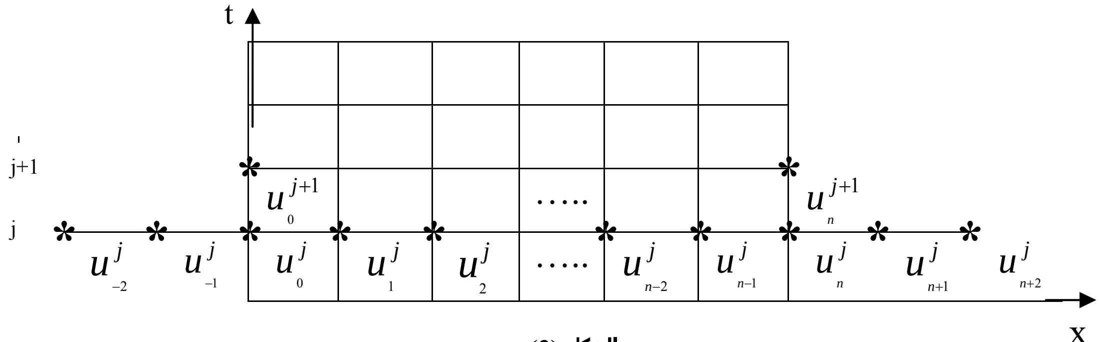
الحل (Focus) وغير معرفة هي u_{-1}^{j} و u_{n+1}^{j} ولا يمكن استخدام الشروط الحدودية فيها كون أن النقطة التي يراد حسابها لا تقع على الشرط الحدودي وكما بينا في الشكل(2).

3-1-1 الشروط الحدودية

ذكرنا في البند (2) النموذج الرياضي لمعادلة KdV-Burger والشروط الحدودية للمعادلة والمتمثلة بالمعادلة (2) عندما $x=a$ و $x=b$. ولتقريب الشروط الحدودية باستخدام الطريقة الصريحة نحتاج إلى تعريف النقاط $x_{-2}, x_{-1}, x_{n+1}, x_{n+2}$ كما ياتي:

$x_{-2}=x_0-2\Delta x \;, x_{-1}=x_0-\Delta x\;,\; x_{n+1}=x_n+\Delta x\;,\; x_{n+1}=x_n+2\Delta x$

إذ أن هذه النقاط تقع خارج الشبكة وكما في الشكل (3):



الشكل (3)

يوضح النقاط التي تقع خارج المشبك في المستويين j+1 و j

الآن باستخدام الفروقات المركزية للشرط الحدودي الأول

$$\frac{\partial u(a,t)}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial u(b,t)}{\partial x}=0$$

وباستخدام المعادلة (3) للمشتقة الأولى عندما i=0 نحصل على ما ياتي:

$$\frac{u_{0+1}^{j}-u_{0-1}^{j}}{2.h}=0$$
$$u_1^{j}=u_{-1}^{j} \qquad ...(17)$$

وعندما i=n نحصل على ما ياتي:

$$\frac{u_{n+1}^{j}-u_{n-1}^{j}}{2.h}=0$$
$$u_{n+1}^{j}=u_{n-1}^{j} \qquad ...(18)$$

والآن بالنسبة للتقريب العددي للشرط الحدودي الثاني

$$\frac{\partial^2 u(a,t)}{\partial x^2}=0$$
$$\frac{\partial^2 u(b,t)}{\partial x^2}=0$$

وباستخدام المعادلة (13) للمشتقة الثانية عندما i=0 وبتعويض المعادلة (17) نحصل على ما ياتي:

$$u_{-2}^{j} = 32\, u_{1}^{j} - 30\, u_{0}^{j} - u_{2}^{j} \quad ...(19)$$

وبالأسلوب نفسه عندما i=n نحصل على ما ياتي:

$$u_{n+2}^{j} = 32\, u_{n-1}^{j} - 30\, u_{n}^{j} - u_{n-2}^{j} \quad ...(20)$$

نعوض كل من المعادلتين (17) و (19) في المعادلة(15) عندما i=0 نحصل على المعادلة (21) بعد التبسيط:

$$u_{0}^{j+1} = \left[1-2\,r\,v-\frac{15\,.r}{h}\mu\right]u_{0}^{j} + \left[2\,r\,v+\frac{16\,.r}{h}\mu\right]u_{1}^{j} - \frac{r}{h}\mu\, u_{2}^{j} \quad ...(21)$$

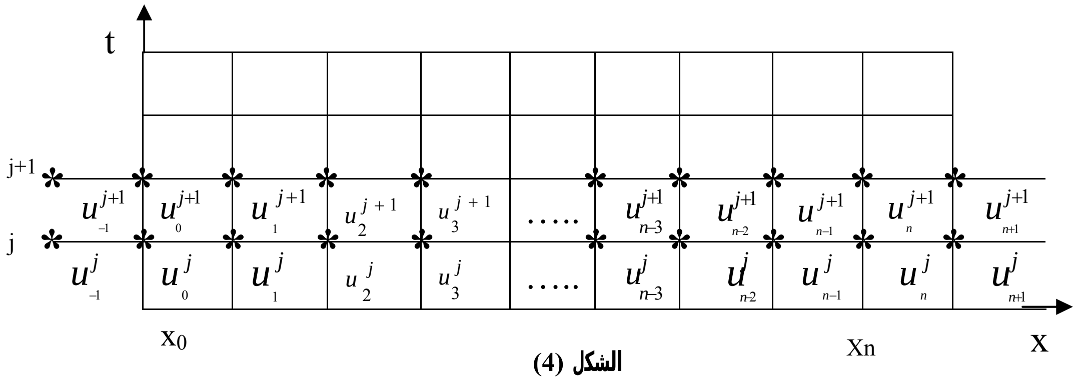
ونعوض كلا من المعادلتين (18) و (20) في المعادلة(15) عندما i=n فنحصل على ما ياتي:

$$u_{n}^{j+1} = \left[1-2\,r\,v+\frac{15\,.r}{h}\mu\right]u_{n}^{j} + \left[2rv-\frac{16\,.r}{h}\mu\right]u_{n-1}^{j} + \frac{r}{h}\mu\, u_{n-2}^{j} \quad ...(22)$$

3-2 اشتقاق صيغة طريقة Crank-Nicholson لمعادلة KdV-Burger

اكتشفت هذه الطريقة في عام 1947م من قبل العالمين جون كرانك و فايلس نيكلسون (John Crank and Phyllis Nicholson) وفي هذه الطريقة يتم التعويض عن المشتقات الجزئية الأولى u_x والثانية u_{xx} والثالثة u_{xxx} بالمعدل الحسابي لتقريبات الفروقات المركزية لها عند الزمن (j) و($j+1$) وتقريب الدالة $u(x,t)$ بالمقدار $u(x_i,t_j)$ وكتابتها اختصاراً u_i^{j+1}.

لإيجاد الحل بهذه الطريقة نتبع الأسلوب الجديد وهو أن يتم حساب الحل u_1^{j+1} باستخدام المعدل الحسابي للمعادلات الفرقية التقدمية (Forward Finite Differences equations) أي المعادلة (6)،(8) و(10) ويتم تعويضها في المعادلة(1) وكما مبين في الشكل(4) لنحصل على ما ياتي:



الشكل (4)

يوضح الحل عند النقطة التي تقع خارج منطقة الحل عند حساب u_1^{j+1} و u_{n-1}^{j+1} بطريقة Crank-Nicholson

$$\left[1-\frac{3.r\,h\,\varepsilon}{4}u_i^j-r\,v-\frac{5.r.\mu}{4h}\right]u_i^{j+1}+\left[r\,h\,\varepsilon\,u_i^j+\frac{5}{2}r\,v+\frac{9.r.\mu}{2h}\right]u_{i+1}^{j+1}+\left[-\frac{r\,h\,\varepsilon}{4}u_i^j-2\,r\,v-\frac{6.r.\mu}{h}\right]u_{i+2}^{j+1}$$
$$+\left[\frac{r}{2}v+\frac{7\,\mu.r}{2h}\right]u_{i+3}^{j+1}-\frac{3.r.\mu}{4h}\,u_{i+4}^{j+1}=\left[1+\frac{3}{4}\varepsilon\,rh\,u_i^j+r\,v+\frac{5.r.\mu}{4h}\right]u_i^j+\left[-r\,h\,\varepsilon\,u_i^j-\frac{5}{2}r\,v-\frac{9.r.\mu}{2h}\right]u_{i+1}^j$$
$$+\left[\frac{r\,h\,\varepsilon}{4}u_1^j+2\,r\,v+\frac{6.\mu.r}{h}\right]u_{i+2}^j+\left[-\frac{r}{2}v-\frac{7.\mu.r}{2h}\right]u_{i+3}^j+\frac{3.r.\mu}{4h}\,u_{i+4}^j \qquad ...(23)$$

أما بالنسبة للحلول التقريبية لبقية نقاط المشبك في الصف الواحد أي $u(x_i,t_{j+1})$ حيـث $i=2,3,...,n-2$ فيتم بأخذ المعدل الحسابي لكل مـن المعـادلات (3)،(4) و(5) وتعويـضها بالمعادلة (1) لنحصل على :

$$-\frac{r.\mu}{4h}u_{i-2}^{j+1}+\left[-\frac{r.h.\varepsilon}{2}u_i^j-\frac{r.v}{2}+\frac{r.\mu}{2h}\right]u_{i-1}^{j+1}+[1+r\,v]u_i^{j+1}$$
$$+\left[\frac{r.h.\varepsilon}{2}u_i^j-\frac{r.v}{2}-\frac{r.\mu}{2h}\right]u_{i+1}^{j+1}+\frac{r.\mu}{4h}\,u_{i+2}^{j+1}=\frac{r}{4h}\mu\,u_{i-2}^j+\left[\frac{r.h.\varepsilon}{2}u_i^j+\frac{r.v}{2}-\frac{r.\mu}{2h}\right]u_{i-1}^j$$
$$+[1-r\,v]u_i^j+\left[-\frac{r.h.\varepsilon}{2}u_i^j+\frac{r.v}{2}+\frac{r.\mu}{2h}\right]u_{i+1}^j-\frac{r.\mu}{4h}\,u_{i+2}^j \qquad ...(24)$$

حيث أن $r=k/h^2$

نلاحظ من المعادلة (24) أن الطرف الأيسر يتضمن خمس قيم غير معلومة لدالـة (u) عند الخطوة الزمنية الجديدة (j+1) ، في حين أن الطرف الأيمن يحوي على قيم كلها معلومـة عند الخطوة الزمنية (j) ، لذلك فـإن المعادلـة (24) تـستخدم لإيجـاد قـيم نقـاط الـشبكة $x_i\,,i=2,3,...,n-2$ للخطوة الزمنية الجديدة بدلالة القيم المعلومة من الخطوة الزمنية السابقة.

أما الحل u_{n-1}^{j+1} عند النقطة x_{n-1} فيتم حسابه بأخذ المعدل الحسابي للمعـادلات (7)،(9) و(11) وتعويضها في المعادلة (1) وبعد التبسيط نحصل على ما ياتي:

$$\left[1+\frac{3.r\,h\,\varepsilon}{4}u_{n-1}^j-r\,v-\frac{5.r.\mu}{4h}\right]u_{n-1}^{j+1}+\left[-r\,h\,\varepsilon\,u_{n-1}^j+\frac{5.r\,v}{2}-\frac{9.r.\mu}{2h}\right]u_{n-2}^{j+1}+\left[r\,h\,\varepsilon\,u_{n-1}^j-2r\,v+\frac{6.r.\mu}{h}\right]u_{n-3}^{j+1}$$
$$+\left[\frac{r.v}{2}-\frac{7.r.\mu}{2h}\right]u_{n-4}^{j+1}+\frac{3.r.\mu}{4h}u_{n-5}^{j+1}=\left[1-\frac{3}{4}r\,h\,\varepsilon\,u_{n-1}^j+r\,v-\frac{5.r.\mu}{4h}\right]u_{n-1}^j+\left[r\,h\,\varepsilon\,u_{n-1}^j-\frac{5.r\,v}{2}+\frac{9.r.\mu}{2h}\right]u_{n-2}^j$$
$$+\left[-\frac{r\,h\,\varepsilon}{4}u_{n-1}^j+2r\,v-\frac{6.r.\mu}{h}\right]u_{n-3}^j+\left[-\frac{r.v}{2}+\frac{7.r.\mu}{2h}\right]u_{n-4}^j-\frac{3.r.\mu}{4h}u_{n-5}^j \qquad ...(25)$$

إذاً المعادلات (23)،(24) و(25) هي تقريبات الحلول بالفروقـات المنتهيـة لطريقـة Crank-Nicholson وهذه المعادلات تؤدي إلى تكوين نظام جبري خماسي الأقطار بقـي أن نجد الحل عند حدي الشبكة بهذه الطريقة .

3-2-1. الشروط الحدودية

إن تقريب المشتقات في الشروط الحدودية يكون بواسطة الفروقات المركزية . باستخدام المعادلة (3) للمشتقة الأولى في الشرط الحدودي الأول عندما i=0 نحصل على ما ياتي:

$$u_1 = u_{-1} \qquad ...(26)$$

وعندما i=n نحصل على

$$u_{n+1} = u_{n-1} \qquad ...(27)$$

بالنسبة للتقريب العددي للشرط الحدودي الثاني وباستخدام المعادلة (13) للمشتقة الثانية عندما i=0 وبتعويض المعادلة (27) ينتج

$$u_{-2} = 32u_1 - 30u_0 - u_2 \qquad ...(28)$$

وعندما i=n نحصل على

$$u_{n+2} = 32\,u_{n-1} - 30\,u_n - u_{n-2} \qquad ...(29)$$

نعوض كلا من المعادلتين (26) و (28) في المعادلة(24) عندما i=0 نحصل على:

$$\left[1 + vr + \frac{15.r.\mu}{2h}\right] u_i^{j+1} - \left[vr + \frac{8.r.\mu}{h}\right] u_{i+1}^{j+1} + \frac{r.\mu}{2h} u_{i+2}^{j+1} = \left[1 - vr - \frac{15.r.\mu}{2h}\right] u_i^j + \left[vr + \frac{8.r.\mu}{h}\right] u_{i+1}^j - \frac{r.\mu}{2h} u_{i+2}^j \qquad ...(30)$$

ونعوض كلا من المعادلتين (27) و (29) في المعادلة(24) عندما i=n نحصل على

$$\left[1 + vr - \frac{15.r.\mu}{2h}\right] u_i^{j+1} + \left[-vr + \frac{8.r.\mu}{h}\right] u_{i-1}^{j+1} - \frac{r.\mu}{2h} u_{i-2}^{j+1} = \left[1 - vr + \frac{15.r.\mu}{2h}\right] u_i^j + \left[vr - \frac{8.r.\mu}{h}\right] u_{i-1}^j + \frac{r.\mu}{2h} u_{i-2}^j \qquad ...(31)$$

إذن التقريب العددي لمعادلة KdV-Burger مع الشروط الحدودية والابتدائية وباستخدام طريقة Crank-Nicholson يتمثل بالمعادلات الاتية :

$$u_i^0 = f(x_i) \qquad , i = 0,1,2,3,...,\ n$$

$$\left[1 + vr + \frac{15.r.\mu}{2h}\right] u_i^{j+1} - \left[vr + \frac{8.r.\mu}{h}\right] u_{i+1}^{j+1} + \frac{r.\mu}{2h} u_{i+2}^{j+1} = \left[1 - vr - \frac{15.r.\mu}{2h}\right] u_i^j + \left[vr + \frac{8.r.\mu}{h}\right] u_{i+1}^j - \frac{r.\mu}{2h} u_{i+2}^j \qquad , i = 0\ \forall\ j \ge 0$$

$$\left[1 - \frac{3.rh\varepsilon}{4} u_i^j - rv - \frac{5.r.\mu}{4h}\right] u_i^{j+1} + \left[rh\varepsilon u_i^j + \frac{5}{2} rv + \frac{9.r.\mu}{2h}\right] u_{i+1}^{j+1} + \left[-\frac{rh\varepsilon}{4} u_i^j - 2rv - \frac{6.r.\mu}{h}\right] u_{i+2}^{j+1} + \left[\frac{r}{2} v + \frac{7\mu.r}{2h}\right] u_{i+3}^{j+1} - \frac{3.r.\mu}{4h} u_{i+4}^{j+1} = \left[1 + \frac{3}{4}\varepsilon rh u_i^j + rv + \frac{5.r.\mu}{4h}\right] u_i^j + \left[-rh\varepsilon u_i^j - \frac{5}{2} rv - \frac{9.r.\mu}{2h}\right] u_{i+1}^j + \left[\frac{rh\varepsilon}{4} u_1^j + 2rv + \frac{6.\mu.r}{h}\right] u_{i+2}^j + \left[-\frac{r}{2} v - \frac{7.\mu.r}{2h}\right] u_{i+3}^j + \frac{3.r.\mu}{4h} u_{i+4}^j \qquad , i = 1, \forall\ j \ge 0$$

$$-\frac{r.\mu}{4h}u_{i-2}^{j+1}+\left[-\frac{r.h.\varepsilon}{2}u_i^j-\frac{r.v}{2}+\frac{r.\mu}{2h}\right]u_{i-1}^{j+1}+[1+rv]u_i^{j+1}+\left[\frac{r.h.\varepsilon}{2}u_i^j-\frac{r.v}{2}-\frac{r.\mu}{2h}\right]u_{i+1}^{j+1}$$
$$+\frac{r.\mu}{4h}u_{i+2}^{j+1}=\frac{r}{4h}\mu\, u_{i-2}^{j}+\left[\frac{r.h.\varepsilon}{2}u_i^j+\frac{r.v}{2}-\frac{r.\mu}{2h}\right]u_{i-1}^{j}+[1-rv]u_i^j$$
$$+\left[-\frac{r.h.\varepsilon}{2}u_i^j+\frac{r.v}{2}+\frac{r.\mu}{2h}\right]u_{i+1}^{j}-\frac{r.\mu}{4h}u_{i+2}^{j}\qquad ,i=2,\dots,n-2$$

$$\left[1+\frac{3.r\,h\,\varepsilon}{4}u_{n-1}^j-r\,v-\frac{5.r.\mu}{4h}\right]u_{n-1}^{j+1}+\left[-r\,h\,\varepsilon\,u_{n-1}^j+\frac{5.r\,v}{2}-\frac{9.r.\mu}{2h}\right]u_{n-2}^{j+1}+\left[r\,h\,\varepsilon\,u_{n-1}^j-2r\,v+\frac{6.r.\mu}{h}\right]u_{n-3}^{j+1}$$
$$+\left[\frac{r.v}{2}-\frac{7.r.\mu}{2h}\right]u_{n-4}^{j+1}+\frac{3.r.\mu}{4h}u_{n-5}^{j+1}=\left[1-\frac{3}{4}r\,h\,\varepsilon\,u_{n-1}^j+r\,v-\frac{5.r.\mu}{4h}\right]u_{n-1}^j+\left[r\,h\,\varepsilon\,u_{n-1}^j-\frac{5.r\,v}{2}+\frac{9.r.\mu}{2h}\right]u_{n-2}^j$$
$$+\left[-\frac{r\,h\varepsilon}{4}u_{n-1}^j+2r\,v-\frac{6.r.\mu}{h}\right]u_{n-3}^j+\left[-\frac{r.v}{2}+\frac{7.r.\mu}{2h}\right]u_{n-4}^j-\frac{3.r.\mu}{4h}u_{n-5}^j\qquad ,i=n-1\,,\forall\ j\ge 0$$

$$\left[1+vr-\frac{15\,r}{2\,h}\mu\right]u_n^{j+1}+\left[-vr+\frac{8\,r}{h}\mu\right]u_{n-1}^{j+1}-\frac{r}{2\,h}\mu\,u_{n-2}^{j+1}$$
$$=\left[1-vr+\frac{15\,r}{2\,h}\mu\right]u_n^{j}+\left[vr-\frac{8\,r}{h}\mu\right]u_{n-1}^{j}+\frac{r}{2\,h}\mu\,u_{n-2}^{j}\qquad ,i=n\ \&\ \forall\ j\ge 0$$

4. تحليل الأستقرارية:

عند حل أية معادلة تفاضلية جزئية عددياً بطرائق الفروقات المنتهية باستخدام طريقة Fourier(Von-Neumann) فإن كل نقطة من نقاط الشبكة u_n^m يمكن التعبير عنها بالصيغة $\psi(t).e^{i\alpha x}$ حيث أن $i=\sqrt{-1}$ و β هو ثابت موجب.[9]

4-1. تحليل الأستقرارية العددية للطريقة الصريحة باستخدام طريقة Fourier (Von-Neumann)

إن دراسة الأستقرارية العددية للطريقة الصريحة لمعادلة KdV-Burger باستخدام طريقة Fourier Von Neumann تكون كما ياتي :

عند العقدة الثانية من المشبك (n=1) نستخدم المعادلات الفرقية الاتية :

$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{k}=v.\left[\frac{2.u_n^m-5.u_{n+1}^m+4.u_{n+2}^m-u_{n+3}^m}{h^2}\right]-\mu.\left[\frac{-5.u_n^m+18.u_{n+1}^m-24.u_{n+2}^m+14u_{n+3}^m-3.u_{n+4}^m}{2.h^3}\right]\quad ...(32)$$
$$n=1$$

نعوض عن u_n^m بـ $\psi(t).e^{i\alpha x}$ إذ أن $\alpha>0$, $i=\sqrt{-1}$ فنحصل على:

$$\frac{\psi(t+k).e^{i\alpha x}-\psi(t).e^{i\alpha x}}{k}=v.\left[\frac{2.\psi(t).e^{i\alpha x}-5.\psi(t).e^{i\alpha(x+h)}+4.\psi(t).e^{i\alpha(x+2h)}-\psi(t).e^{i\alpha(x+3h)}}{h^2}\right]$$
$$-\mu.\left[\frac{-5.\psi(t).e^{i\alpha x}+18.\psi(t).e^{i\alpha(x+h)}-24.\psi(t).e^{i\alpha(x+2h)}+14.\psi(t).e^{i\alpha(x+3h)}-3.\psi(t).e^{i\alpha(x+4h)}}{2.h^3}\right]\quad ...(33)$$

بضرب طرفي المعادلة (33) بـ $\frac{k}{e^{i\alpha x}}$ وفرض أن $r=\frac{k}{h^2}$ نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)}=1+v.r[2-5.e^{i\alpha h}+4.e^{2i\alpha h}-e^{3i\alpha h}]+\frac{\mu.r}{2.h}.[5-18.e^{i\alpha h}+24.e^{2i\alpha h}-14.e^{3i\alpha h}+3.e^{4i\alpha h}]$$

باستخدام مبرهنة مفكوك ذي الحدين [7] وبالتبسيط نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)}=1+v.r.\left[(1-e^{i\alpha h})^3+(1-e^{i\alpha h})^2\right]+\frac{\mu.r}{2h}\left[3(1-e^{i\alpha h})^4+2(1-e^{i\alpha h})^3\right]$$
$$=1+r.Y(1-e^{i\alpha h})^3+r.(1-e^{i\alpha h})^2.(v+Z(1-e^{i\alpha h})^2)$$

حيث أن $Z = \frac{3.\mu}{2.h}$ و $Y = (v + \frac{\mu}{h})$ بتبسيط المعادلة أعلاه نحصل على ما ياتي:

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = 1 + r.Y(8.\sin^6(\frac{\alpha h}{2}) - 12.i.\sin(\alpha h).\sin^4(\frac{\alpha h}{2}) - 6.\sin^2(\alpha h).\sin^2(\frac{\alpha h}{2}) + i.\sin^3(\alpha h))$$
$$+ r.(4.\sin^4(\frac{\alpha h}{2}) - 4.i.\sin(\alpha h).\sin^2(\frac{\alpha h}{2}) - \sin^2(\alpha h)).(v + Z(4.\sin^4(\frac{\alpha h}{2}) - 4.i.\sin(\alpha h).\sin^2(\frac{\alpha h}{2}) - \sin^2(\alpha h))) = A + i.B = \xi$$

إذ أن ξ هو عامل التضخم (Amplification Factor) وأن :

$$A = 1 + 8.Y.r.\sin^6(\frac{\alpha h}{2}) - 6.Y.r.\sin^2(\alpha h).\sin^2(\frac{\alpha h}{2}) - 24.r.Z.\sin^2(\alpha h).\sin^4(\frac{\alpha h}{2})$$
$$+ 16.r.Z.\sin^8(\frac{\alpha h}{2}) + 4.r.v.\sin^4(\frac{\alpha h}{2}) - r.v.\sin^2(\alpha h) + r.Z.\sin^4(\alpha h)$$
$$B = \sin(\alpha h).(-12Y.r.\sin^4(\frac{\alpha h}{2}) + Y.r.\sin^2(\alpha h) - 4.r.v.\sin^2(\frac{\alpha h}{2})$$
$$- 32.Z.r.\sin^6(\frac{\alpha h}{2}) + 8.Z.r.\sin^2(\alpha h).\sin^2(\frac{\alpha h}{2}))$$

إن الشرط الضروري والكافي الأستقرارية العددية هو

$$\left|\frac{\psi(t+\Delta t)}{\psi(t)}\right| = \xi \le 1$$

وبما أن ξ هو عدد عقدي . عليه فإن:

$$|\xi| = \sqrt{\xi\bar{\xi}} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

ولكي تكون $|\xi| \le 1$ من الضروري أن تكون $A^2+B^2 \le 1$ وبأخذ $\sin^2\frac{\alpha h}{2}=1$ لـبعض قـيم αh

وبفرض أن $\sin^2 \beta k$ تأخذ أكبر قيمة (يعني واحد) [5]، عليه نحصل على

$$A^2 + B^2 = (1 - r.(-2.Y + 7.Z - 3.v)^2 + r^2.(-11.v - 4.v - 24.Z)^2$$

وبالتعويض عن قيم Y وZ يكون لدينا:

$$\Rightarrow r \le \frac{2.(-5.v + \frac{17.\mu}{2.h})}{(-5.v + \frac{17.\mu}{2.h})^2 + (15.v + \frac{47.\mu}{h})^2} \qquad ...(34)$$

$$\Rightarrow k \le \frac{2.h^2.(-5.v + \frac{17.\mu}{2.h})}{(-5.v + \frac{17.\mu}{2.h})^2 + (15.v + \frac{47.\mu}{h})^2} \qquad ...(35)$$

أما بالنسبة لعقد المشبك من العقدة الثالثة إلى العقدة p-2 تستخدم المعادلات الفرقية الاتية:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{k} = v.\left[\frac{u_{n+1}^m - 2.u_n^m - u_{n-1}^m}{h^2}\right] - \mu.\left[\frac{u_{n+2}^m - 2.u_{n+1}^m + 2.u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{2.h^3}\right], n = 2,..., p-2 \qquad ...(36)$$

وبالتعويض عن u_n^m بـ $\psi(t).e^{i\alpha x}$ في المعادلة (36) وبعد التبسيط نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = 1 - 4.v.r.\sin^2(\frac{\alpha h}{2}) + \frac{4.i.r.\mu}{h}\sin^2(\frac{\alpha h}{2})\sin(\alpha h) = \xi$$

حيث

$$\left.\begin{array}{l} \xi = A + iB \\ A = 1 - 4.\mu.r.\sin^2(\frac{\alpha h}{2}) \\ B = 4\frac{r.\mu}{h}\sin^2(\frac{\alpha h}{2})\sin(\alpha h) \end{array}\right\} \quad ...(37)$$

وبما أن ξ هو عدد عقدي.عليه فإن:

$$|\xi| = \sqrt{\xi\bar{\xi}} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

ولكي تكون $|\xi| \leq 1$ من الضروري أن تكون $A^2 + B^2 \leq 1$ أي أن

$$A^2 + B^2 = 1 - 8.v.r.\sin^2(\frac{\alpha h}{2}) + 16.r^2.v^2.\sin^4(\frac{\alpha h}{2}) + \frac{16.r^2.\mu^2}{h^2}\sin^4(\frac{\alpha h}{2}).\sin^2(\alpha h) \quad ...(38)$$

وبأخذ $\sin^2\frac{\alpha h}{2}=1$ لبعض قيم αh وبفرض أن $\sin^2 \beta k$ تأخذ أكبر قيمة (يعني واحد) [5]، عليه تصبح المعادلة (38) كما يأتي:

$$r \leq \frac{v}{2.(v^2 + \frac{\mu^2}{h^2})} \quad , \quad k \leq \frac{v.h^2}{2.(v^2 + \frac{\mu^2}{h^2})} \quad ...(39)$$

وباستخدام نفس أسلوب دراسة إستقرارية الحل العددي عند العقدة n=1 نحصل على شرط الأستقرارية عند العقدة n=p-1 وهو

$$r \leq \frac{2.(-5.v - \frac{17.\mu}{2.h})}{(5.v + \frac{17.\mu}{2.h})^2 + (15.v - \frac{47.\mu}{h})^2} \quad ...(40)$$

إذاً تكون الطريقة الصريحة لحل معادلة KdV-Burger مستقرة (stable) ضمن نقاط الشبكة n=2,…,p-2 إذا تم اختيار الخطوة الزمنية k وخطوة الطول h بحيث تحقق القيد (39) وعند العقدة الثانية والعقدة p-1 تكون الطريقة مستقرة تحت شرط تحقيق القيد في المعادلتين (35) و(40) وهذا يعتمد على اختيار قيم كل من h, v, μ.

4-2. الأستقرارية العددية لطريقة Crank-Nicholson باستخدام طريقة(Von-Neumann) Fourier

إن دراسة الأستقرارية العددية لطريقة Crank-Nicholson لمعادلة KdV-Burger باستخدام طريقة Von Neumann تكون كالآتي:

عندما n=1 نستخدم المعادلة الفرقية الاتية:

$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{k}=\frac{v}{2}.\left[\frac{2.u_n^{m+1}-5.u_{n+1}^{m+1}+4.u_{n+2}^{m+1}-u_{n+3}^{m+1}}{h^2}+\frac{2.u_n^{m}-5.u_{n+1}^{m}+4.u_{n+2}^{m}-u_{n+3}^{m}}{h^2}\right]$$

$$-\frac{\mu}{2}.\left[\frac{-5.u_n^{m+1}+18.u_{n+1}^{m+1}-24.u_{n+2}^{m+1}+14.u_{n+3}^{m+1}-3.u_{n+4}^{m+1}}{2.h^3}+\frac{-5.u_n^{m}+18.u_{n+1}^{m}-24.u_{n+2}^{m}+14.u_{n+3}^{m}-3.u_{n+4}^{m}}{2.h^3}\right] \quad ...(40)$$

$$n=1$$

نعوض عن u_n^m بـ $\psi(t).e^{i\alpha x}$ في المعادلة (40) فنحصل على :

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)}=\frac{1+v.\frac{r}{2}.\left[2-5e^{i\alpha h}+4.e^{2i\alpha h}-e^{3i\alpha h}\right]+\mu.\frac{r}{4.h}.\left[5-18.e^{i\alpha h}+24.e^{2i\alpha h}-14.e^{3i\alpha h}+3.e^{4i\alpha h}\right]}{1-v.\frac{r}{2}.\left[2-5e^{i\alpha h}+4.e^{2i\alpha h}-e^{3i\alpha h}\right]-\mu.\frac{r}{4.h}.\left[5+18.e^{i\alpha h}+24.e^{2i\alpha h}-14.e^{3i\alpha h}+3.e^{4i\alpha h}\right]}$$

باستخدام مبرهنة مفكوك ذي الحدين ينتج:

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)}=\frac{1+\frac{v.r}{2}.\left[(1-e^{i\alpha h})^3+(1-e^{i\alpha h})^2\right]+\frac{\mu.r}{4.h}\left[3(1-e^{i\alpha h})^4+2(1-e^{i\alpha h})^3\right]}{1-\frac{v.r}{2}.\left[(1-e^{i\alpha h})^3+(1-e^{i\alpha h})^2\right]-\frac{\mu.r}{4.h}\left[3(1-e^{i\alpha h})^4+2(1-e^{i\alpha h})^3\right]}$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)}=\frac{1+\frac{r.Y}{2}(1-e^{i\alpha h})^3+r.(1-e^{i\alpha h})^2.(\frac{v}{2}+\frac{Z}{2}(1-e^{i\alpha h})^2)}{1-\frac{rY}{2}(1-e^{i\alpha h})^3+r.(1-e^{i\alpha h})^2.(-\frac{v}{2}-\frac{Z}{2}(1-e^{i\alpha h})^2)} \quad ...(41)$$

حيث $Z=\frac{3.\mu}{2.h}$ و $Y=(v+\frac{\mu}{h})$ والآن نعيد كتابة المعادلة (41) بالصيغة المبسطة الاتية بعد إجراء العمليات نفسها المتبعة في إستقرارية الطريقة الصريحة لنحصل على :

$$\frac{\psi(t+\Delta t)}{\psi(t)}=\frac{A-i.B}{A_1+i.B} \quad ...(42)$$

حيث

$$A=1+4.r.Y.\sin^6(\frac{\alpha h}{2})-3.r.Y.\sin^2(\alpha h).\sin^2(\frac{\alpha h}{2})-12.r.Z.\sin^2(\alpha h).\sin^4(\frac{\alpha h}{2})$$
$$+8.r.Z.\sin^8(\frac{\alpha h}{2})+2.r.v.\sin^4(\frac{\alpha h}{2})-\frac{r.v}{2}\sin^2(\alpha h)+\frac{r.Z}{2}.\sin^4(\alpha h)$$

$$A_1=1-4.r.Y.\sin^6(\frac{\alpha h}{2})+3.r.Y.\sin^2(\alpha h).\sin^2(\frac{\alpha h}{2})+12.r.Z.\sin^2(\alpha h).\sin^4(\frac{\alpha h}{2})$$
$$-8.r.Z.\sin^8(\frac{\alpha h}{2})-2.r.v.\sin^4(\frac{\alpha h}{2})-\frac{v.r}{2}\sin^2(\alpha h)-\frac{r.Z}{2}.\sin^4(\alpha h)$$

$$B=\sin(\alpha h).[6.r.Y.\sin^4(\frac{\alpha h}{2})-\frac{r.Y}{2}.\sin^2(\alpha h)+2.r.v.\sin^2(\frac{\alpha h}{2})$$
$$+16.r.Z.\sin^6(\frac{\alpha h}{2})-4.r.Z.\sin^2(\alpha h).\sin^2(\frac{\alpha h}{2})]$$

لبعض قيم αh تكون $\sin^2(\frac{\alpha h}{2})$ قيمتها واحد وبفرض أن $\sin^2\beta k$ تأخذ أكبر قيمـة (واحـد) عليه

$$A = 1 + r.(\frac{5.v}{2} - \frac{17.\mu}{4h})$$
$$A_1 = 1 + r.(\frac{5.v}{2} + \frac{17.\mu}{4h})$$
$$B = r.\sin(\alpha h).(\frac{15.v}{2} + \frac{47.\mu}{2.h})$$

الآن باستخدام الشرط الضروري والكافي للأستقرارية العددية يعني أن $|\xi| \le 1$. ولكـي تكـون $|\xi| \le 1$ من الضروري أن تكون $A < A_1$ بمعنى أن

$$1 + r.(\frac{5.v}{2} - \frac{17.\mu}{4h}) < 1 + r.(-\frac{5.v}{2} + \frac{17.\mu}{4h})$$

لأن r >0 دائماً صحيحة

$$\Rightarrow \frac{5.v}{2} - \frac{17.\mu}{4h} < -\frac{5.v}{2} + \frac{17.\mu}{4h}$$

$$h < \frac{17.\mu}{10.v} \qquad ...(43)$$

الآن لدراسة الأستقرارية العددية للحل بالنسبة لعقد المشبك من العقدة الثالثة إلى العقـدة p-2 نستخدم المعادلة الفرقية الاتية:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{k} = \frac{v}{2}.\left[\frac{u_{n+1}^{m+1} - 2.u_n^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + \frac{u_{n+1}^m - 2.u_n^m - u_{n-1}^m}{h^2}\right]$$
$$-\frac{\mu}{2}.\left[\frac{u_{n+2}^{m+1} - 2.u_{n+1}^{m+1} + 2.u_{n-1}^{m+1} - u_{n-2}^{m+1}}{2.h^3} + \frac{u_{n+2}^m - 2.u_{n+1}^m + 2.u_{n-1}^m - u_{n-2}^m}{2.h^3}\right] \qquad ...(44)$$
$$n = 2,...,\ p-2$$

نعوض عن u_n^m بـ $\psi(t).e^{i\alpha x}$ في المعادلة (3.21) وبعد التبسيط نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \frac{1 - 2.v.r.\sin^2(\frac{\alpha h}{2}) + \frac{2.r.i.\mu}{h}\sin^2(\frac{\alpha h}{2})\sin(\alpha h)}{1 + 2.\mu.r.\sin^2(\frac{\alpha h}{2}) - \frac{2.r.i.\mu}{h}\sin^2(\frac{\alpha h}{2})\sin(\alpha h)} = \frac{A + iB}{A_1 - iB} = \xi \qquad ...(45)$$

حيث

$$A = 1 - 2.v.r.\sin^2(\frac{\alpha h}{2})$$
$$A_1 = 1 + 2.v.r.\sin^2(\frac{\alpha h}{2})$$
$$B = \frac{2.r.\mu}{h}\sin^2(\frac{\alpha h}{2})\sin(\alpha h)$$

في المعادلة (45) نجد أن

$$|\xi| = \sqrt{\xi\bar{\xi}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A_1^2 + B^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-2.v.r.\sin^2(\frac{\alpha h}{2}))^2 + (\frac{2.r.\mu}{h}\sin^2(\frac{\alpha h}{2})\sin(\alpha h))^2}{(1+2.v.r.\sin^2(\frac{\alpha h}{2}))^2 + (\frac{2.r.\mu}{h}\sin^2(\frac{\alpha h}{2})\sin(\alpha h))^2}} \quad ...(46)$$

نلاحظ أن $A < A_1$ عليه فأن $|\xi| \leq 1$.

وباستخدام نفس أسلوب دراسة إستقرارية الحل العددي عند العقدة n=1 نحـصل علـى شرط الأستقرارية عند العقدة n=p-1 وهو

$$h > -\frac{17.\mu}{10.v} \quad ...(47)$$

بما أن خطوة الطول (h) لا يمكن أن تكون سالبة. أي أن المتباينة (47) تؤدي إلـى أن $h > 0$ وهذه صحيحة دائماً. مما سبق ينتج أن طريقة Crank-Nicholson تكون مستقرة ومـن دون شرط (unconditionally stable) على كل نقاط المشبك.

5. النتائج العددية:

في هذه الفقرة سنقدم النتائج العددية لكل من الطريقتين ونقارنها مع نتائج الحل التحليلي لمعادلة KdV-B علماً أن الحل التحليلي للمعادلة هو

$$u(x,t) = \frac{12.v^2}{\varepsilon\mu}\left[1 - \frac{e^{\frac{2.v}{\varepsilon\mu}(x-wt)}}{(e^{\frac{v}{\varepsilon\mu}(x-wt)} + E)^2}\right], \quad w = \frac{12v^2}{25\mu}, E = 1000$$

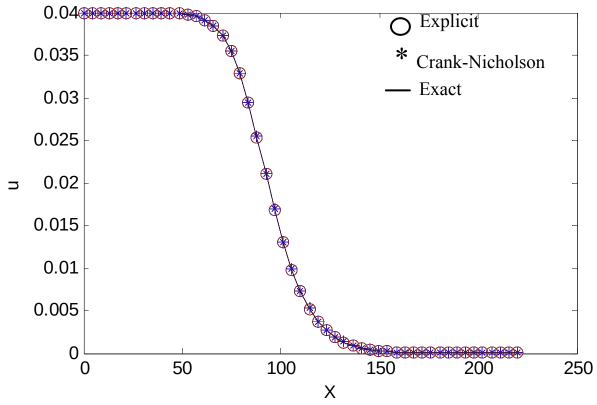
حيـث أن E ثابـت موجـب [8]. وسـيتم أخـذ قـيم المعلمـات $\mu = 2, v = 1, \varepsilon = 6, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, a = 0, b = 220$ مع خطوة الطـول h=4.4 وخطـوة الـزمن k=0.02 والشرط الابتدائي

$$u(x,0) = \frac{12.v^2}{\varepsilon\mu}\left[1 - \frac{e^{\frac{2.v.x}{\varepsilon\mu}}}{(e^{\frac{v.x}{\varepsilon\mu}} + E)^2}\right], \quad w = \frac{12v^2}{25\mu}, E = 1000$$

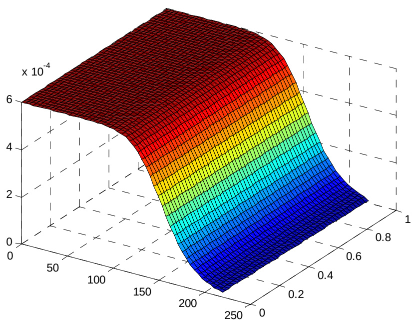
الجدول (1)

يوضح مقارنة عددية مع الحل التحليلي لمعادلة KdV-B عند الزمن t=0.3

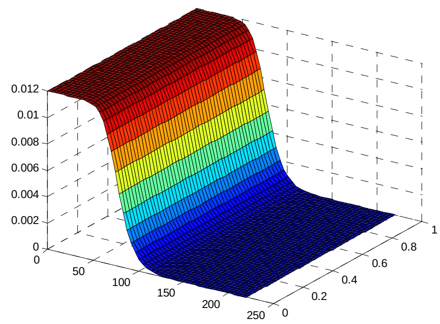
X	Exact solution	Explicit	Crank –Nicholson
0	0.039999960318446	0.039999955148289	0.039999955159623
4.4	0.039999917455490	0.039999916917152	0.039999917298841
8.8	0.039999828360065	0.039999831042243	0.039999828615391
13.2	0.039999643298937	0.039999648925799	0.039999643849634
17.6	0.039999259305798	0.039999270965322	0.039999260444376
22	0.039998463729635	0.039998487800572	0.039998466073458
26.4	0.039996818958375	0.039996868469135	0.039996823759595
30.8	0.039993429053020	0.039993530355763	0.039993438819987
35.2	0.039986473242929	0.039986678974430	0.039986492918280
39.6	0.039972290394539	0.039972703834823	0.039972329494921
44	0.039943630276347	0.039944449030829	0.039943706546412
48.4	0.039886445276387	0.039888034297712	0.039886590383112
52.8	0.039774353780204	0.039777354806152	0.039774621010196
57.2	0.039559966197731	0.039565433937697	0.039560438522562
61.6	0.039163381819971	0.039172896289629	0.039164175685396
66	0.038461556955463	0.038477198862063	0.038462812328880
70.4	0.037288467987453	0.037312501371842	0.037290307610848
74.8	0.035461635026268	0.035495806225642	0.035464071156986
79.2	0.032845195254650	0.032889801792040	0.032847994167581
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
136.4	0.000912851204663	0.000917413592494	0.000912391051058
140.8	0.000635995288886	0.000639196955007	0.000635668884972
145.2	0.000442393592640	0.000444631904708	0.000442163720484
149.6	0.000307380606630	0.000308941293698	0.000307219517598
154	0.000213405197478	0.000214491392745	0.000213292695451
158.4	0.000148080487635	0.000148835475892	0.000148002103495
162.8	0.000102713378867	0.000103237682647	0.000102658855086
167.2	0.000071226665812	0.000071590543220	0.000071188782121
171.6	0.000049383222098	0.000049635651094	0.000049356920732
176	0.000034234310793	0.000034409373222	0.000034216060549
180.4	0.000023730444277	0.000023851826805	0.000023717785384
184.8	0.000016448408533	0.000016532559025	0.000016439630248
189.2	0.000011400494581	0.000011458827490	0.000011394408394
193.6	0.000007901524316	0.000007941957736	0.000007897305151
198	0.000005476326366	0.000005504351512	0.000005473401740
202.4	0.000003795436251	0.000003814859260	0.000003793409063
206.8	0.000002630448955	0.000002643864196	0.000002629045329
211.2	0.000001823035575	0.000001832640413	0.000001822099396
215.6	0.000001263450962	0.000001284579391	0.000001262056950
220	0.000000875629206	0.000000846127470	0.000000847101196



الشكل (5)
مقارنة بين الطريقتين مع الحل التحليلي عند الزمن t=0.3



(7)الشكل
الحل العددي بطريقة Crank –Nicholson
عندما $\varepsilon = 0.01, v = 0.001, \mu = 2$



(6)الشكل
الحل العددي بطريقة Crank –Nicholson
عندما $\varepsilon = 0.1, v = 0.01, \mu = 1$

6. من خلال الجدول (1) والشكل (5) نلاحظ الحلول العددية لكلا الطريقتين والحل التحليلي للمسألة حيث يتضح لنا السلوك الفيزيائي لمعادلة KdV-B. وكذلك يوضح كل من الشكلين (6) و (7) الحل العددي للمعادلة بطريقة Crank-Nicholson وبقيم مختلفة لـ ε.

الاستنتاجات :

نستنتج من هذا البحث أن معادلة KdV-B تحوي في حدودها على المشتقة الثالثة وعند تطبيق طرائق الفروقات المنتهية لإيجاد الحل لها تظهر لنا قيم خارج منطقة الحل ولا يمكن التعويض عنها بقيم داخل منطقة الحل عليه تم استحداث أسلوب جديد طبق على طرائق الفروقات المنتهية المستخدمة.

ومن خلال المقارنة بين الطريقة الصريحة وطريقة Crank –Nicholson توصلنا إلى أن الطريقة الصريحة هي الأسهل بينما طريقة Crank-Nicholson أكثر دقة وأسرع

تقارب من الطريقة الصريحة إلى الحل الحقيقي. وتم تحليل الأستقرارية لكلا الطريقتين باستخدام طريقة Fourier (Von-Neumann) وتبين أن طريقة Crank–Nicholson مـستقرة علـى نحو غير مشروط في حين كانت الطريقة الصريحة مستقرة إذا كان $k \le (vh^2/2(v^2+\frac{\mu^2}{h^2}))$ أي أنها مستقرة على نحو مشروط.

المصادر

[1] Andras Balogh and Miroslav Krstic (2000), Boundary Control of the Korteweg-de Vries-Burgers Equation: Further Results on Stabilization and Well-Posedness, with Numerical Demonstration, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.45, No. 9, pp. 1739-1745.

[2] Dambaru Bhatta (2008), Use of Modified Bernstein Polynomials to Solve KdV-Burgers Equation Numerically, Applied Mathematics and Computation, 206, 457-464.

[3] Dogan Kaya (2004), An Application of the Decomposition Method for the KdVB Equation, Applied Mathematics and Computation, 152, 279-288.

[4] John H. Mathews and Kurtis D. Fink (2004), *Numerical Methods Using Matlab*, Fourth Edition, Pearson Education International.

[5] Leon Lapidus and George F.P. (1982),*Numerical Solution of partial Differential Equation in Science and Engineering* , John Wiley and Sons, Inc.

[6] M.A. Helal and M.S.Mehanna (2006), A Comparison Between Two Different Methods for Solving KdV-Burgers Equation, Chaos, Solitons and Fractals, 28, 320-326.

[7] Fred S. Roberts, (1984) , *Applied Combinatorics* , *Rutgers University*, prentice-Hall ,Inc. Englewood cliffs, New Jersey 07932, pp.:56

[8] Talaat S. Aly El-Danaf (2002) ,Numerical Solution of the Korteweg-de Vries Burgers equation by using Quintic Spline method, STUDIA UNIV. “BABEȘ–BOLYAI”, Mathematica , Vol. XLVII, No.2, pp:41-54

[9] Thakumar ,M.S.(1989) ,*Computer Based Numerical Analysis* ,Khanna Publishers.

[10] Wei-Jiu Liu and Miroslav Krstic (1999), Controlling Nonlinear Water Waves: Boundary Stabilization of the Korteweg-de Vries-Burgers Equation, Proceeding of the American Control Conference, pp. 1637-1641.