المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (19) 2011
ص ص [55– 70]

خوارزمية حاسوبية لتقدير مرتبة سلسلة ماركوف مع التطبيق

باسل يونس ذنون الخياط* شعاع محمود عزيز** زينة فالح صالح العجوز***

الملخص

يتعامل هذا البحث مع الجانب الحاسوبي لمسألة تقدير مرتبة سلسلة ماركوف. وتقترح خوارزمية حاسوبية لهذا الغرض وتُبرمج حاسوبيا بلغة MATLABR2009a، وبحيث يتم اختيار المرتبة ذاتيا بعد إدخال المشاهدات والحد الأعلى للمرتبة المراد تقديرها. وتُجرى دراسة محاكاة للتحقق من كفاءة الخوارزمية، ثم يتم تطبيق الخوارزمية على مشاهدات واقعية تمثل مشاهدات الأمطار اليومية الساقطة على مدينة الموصل للسنوات 1994-2000 عند نمذجتها بنموذجين ماركوفيين: الأول باعتبار أن الأمطار اليومية مؤلفة من حالتين، والثاني باعتبار أن الأمطار اليومية مؤلفة من أربع حالات. ويتبين من خلال هذا التطبيق بان الأمطار اليومية الساقطة على مدينة الموصل ذات مرتبة1.

A Computer Algorithm for Order Estimation of Markov Chain with an Application

Abstract

This paper deals with the problem of estimating the order of Markov chains. An algorithm is proposed for this purpose and programmed by MATLABR2009a, such that the maximum order is selected automatically after inputting of observations and the upper limit of the order. A simulation study is carried out to verify the efficiency of the algorithm, then the algorithm

* استاذ/ قسم الرياضيات/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل
** مدرس// قسم الرياضيات/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل
*** م.م./ / قسم الرياضيات/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

تاريخ التسلم :2 /1/ 2011 ——— تاريخ القبول : 1/ 2/ 2011

is applied to the observations of rainfall in the city of Mosul for the years 1994-2000 .It is clear from this application that the daily rainfall in Mosul city is with order 1.

1- مقدمة:

تحتل السلاسل الماركوفية Markov Chains في الوقت الحاضر مكانة مرموقة في شتى المجالات التطبيقية، أنظر الخياط (2011). وتعد مسألة تقدير مرتبات Orders السلاسل الماركوفية من المسائل الإحصائية الأساسية لنمذجة أي مشاهدات Observations يراد نمذجتها وفق النموذج الماركوفي. وتكمن أهمية تقدير المرتبة بكونها تتعلق بتقدير ذاكرة Memory النموذج الماركوفي. ومن الأعمال المبكرة بهذا الخصوص الدراسة التي قام بها الباحثان Miller and Frank (1949) في مجال علم النفس وباستخدام دالة الانتروبي في نظرية المعلومات. أما الإحصائي Bartlett (1951) فكان أول من فكر في أسلوب استخدام اختبار حسن المطابقة Goodness of Fit واختبار نسبة الترجيح Likelihood Ratio في هذا المجال، ثم طور هذه الأفكار الباحث Hole (1954) . ودرس الباحث Gain(1955) عددا من المبرهنات ذوات العلاقة بمسألة تقدير المرتبة والشروط الكافية لمقدر الترجيح الأعظم . واستخدم الباحثان Anderson and Goodman (1957) اختبار مربع كاي لتقدير مرتبات السلاسل الماركوفية.

وبعد ظهور معايير المعلومات في مطلع سبعينيات القرن العشرين، قدم الباحث Tong (1975) بحثا تناول فيه استخدام معيار اكايكي للمعلومات AIC في مجال تقدير مرتبات السلاسل الماركوفية، باعتبار أن هذا المعيار يشكل امتدادا لمقدر الترجيح الأعظم. وقد قام هذا الباحث بتطبيق هذا النهج على مشاهدات ذوات حجوم قليلة ونماذج ماركوفية سهلة لكونه يتطلب حسابات كثيرة ومعقدة. وفي القرن الحادي والعشرين، ونتيجة للصعوبات الحسابية في الطرائق الإحصائية، اتجهت أنظار الباحثين إلى التقنيات الحاسوبية، وعلى وجه الخصوص التقنيات الذكائية، مثل الشبكات العصبية الاصطناعية، أنظر أطروحة الدكتوراه غير المنشورة للباحثة الكسو (2005).

ومن الاستنتاجات المهمة التي خرجت بها دراسة الباحثة الكسو (2005) هي أن استخدام معيار اكايكي للمعلومات AIC تعد من أفضل الطرائق في مجال تقدير مرتبات السلاسل الماركوفية، إلا أن المشكلة الكبرى فيها تكمن في الحسابات: إذ أن تطبيق هذه الطريقة يتطلب تكوين مصفوفات كبيرة وإجراء حسابات مطولة للوصول إلى المرتبة المنشودة. ومن هنا كانت البداية لهذه الورقة البحثية التي وظفت الحاسوب بشكل ذاتي لكي يقوم بانتقاء المرتبة المناسبة بطريقة سهلة دون الحاجة إلى الدخول بالتفاصيل الإحصائية الكثيرة بهذا الصدد.

2- الجانب النظري:

2-1 تعاريف أساسية (الخياط (2011)):

التعريف(1):

تُعرف **العملية التصادفية Stochastic Process** بأنها عائلة من المتغيرات العشوائية مفهرسة (مؤشرة) بالدليل (المعلمة) n، إذ أن n تعود إلى مجموعة دليل T.

التعريف(2):

إن مجموعة القيم الممكنة للعملية التصادفية تسمى **فضاء الحالة State Space** ويرمز لها S. إن فضاء الحالة ممكن أن يكون محدودا أو غير محدود حسب عدد عناصره.

التعريف(3):

يقال للعملية التصادفية $\{X_n\}$ بأنها تحمل **الخاصية الماركوفية The Markovian Property** إذا كانت تُحقق ما يأتي:

$$P(X_n = j / X_{n-1} = i, X_{n-2} = a, X_{n-3} = b, \ldots, X_0 = c)$$
$$= P(X_n = j / X_{n-1} = i) = p_{ij},$$

لجميع قيم n, i, j, a, b, c.

ويمكن تطوير تعريف ذاكرة Memory العملية التصادفية إلى الذاكرة ذات المَرتبة m وعلى النحو الآتي.

التعريف(4):

يقال للعملية التصادفية $\{X_n\}$ بأنها **ذات ذاكرة مَرتبها m** إذا كان:

$$P(X_n = j / X_{n-1} = i, X_{n-2} = a, X_{n-3} = b, ..., X_{n-m} = c, ...)$$
$$= P(X_n = j / X_{n-1} = i, X_{n-2} = a, X_{n-3} = b, ..., X_{n-m} = c).$$

لجميع قيم n, i, j, a, b, c.

التعريف(5):

سلسلة ماركوف Markov Chain (أو السلسلة الماركوفية) هي عملية ماركوف ذات فضاء حالة متقطّع.

التعريف(6):

مرتبة Order السلسلة الماركوفية هي عدد الحالات السابقة التي تعتمد عليها الحالة الحالية للسلسلة.

2-2 الخوارزمية المقترحة:

تتلخص طريقة تونـك Tong بإيجـاد مقـدر أدنـى AIC، Minimum AIC Estimate (MAICE) باعتباره المقدر الأمثل للمَرتبـة الحقيقيـة. فلـو كانـت AIC(m) تمثل قيمة معيار AIC عندما تكون مَرتبة السلسلة الماركوفية هي m، فإنها تحسب من العلاقة الآتية:

$$AIC(m) = Likelihood\ Ratio\ Statistic - 2(Degrees\ of\ Freedom).$$
$$= {}_m\eta_L - 2(Degrees\ of\ Freedom).$$
$$= {}_m\eta_L - 2(d.f).$$
$$= {}_m\eta_L - 2(\nabla c^{L+1} - \nabla c^{m+1}).$$

حيث أن:

$$(\nabla c^{L+1} - \nabla c^{m+1}) = c^{L+1} - c^{L} - c^{m+1} + c^{m}$$

لقد اثبت كل من Hoel (1954) و Good (1955) بان $(-2\log_m \lambda_L)$ التي تكافئ ${}_m\eta_L$

مساوية للمقدار الآتي [Gates,1975]:

$$-2\log_m \lambda_L = 2\sum_{i,\dots,1} n_{ij\dots m1}\left(\log \frac{n_{ij\dots m1}}{n_{ij\dots m}} - \log \frac{n_{j\dots m1}}{n_{j\dots m}}\right)$$
$$\equiv 2\sum_{i,\dots,1} n_{ij\dots m1} \log\left(\frac{n_{ij\dots m1}}{n_{ij\dots m}} \cdot \frac{n_{j\dots m}}{n_{j\dots m1}}\right)$$

أي أن Hoel (1954) و (1955) Good قدما الصيغ الآتية لحساب ${}_m\eta_L$:

$$\left.\begin{aligned} {}_m\eta_L &= {}_m\eta_{m+1} + \dots + {}_{L-1}\eta_L \\ &= \nabla^2 m_{m+2} + \dots + \nabla^2 m_{L+1} \\ &= \nabla m_{L+1} + \dots + \nabla m_{m+1} \qquad (-1 \le m < L) \\ &= -2\log \lambda_{m,m+1} - 2\log \lambda_{m+1,m+2} - \dots - 2\log \lambda_{L-1,L} \end{aligned}\right\}$$

حيث أن

∇ تمثل مؤثر الفرق Difference Operator .

و أن Likelihood Ratio Statistic تمثل إحصاءه نسبة الترجيح، وهي عبـارة عن لوغاريتم حاصل قسمة دالة الترجيح تحسب تحت فرضيتين، و Degrees of Freedom تمثل عدد درجات الحرية.

إن حسابات AIC(m) تتضمن العديد من التفاصيل الإحصائية غير السهلة والتـي لا يتسع المجال للدخول فيها، كما أن إنجازها يستغرق وقتا طويلا. أما الصعوبات الحسابية فتكمن في الحاجة إلى تكوين مصفوفات كبيرة، تزداد أبعادها بزيادة عـدد عناصر فضاء الحالة، وكذلك بزيادة المَرتبـة المفروضـة للسلـسلة الماركوفيـة. فلغرض تقدير مرتبة مشاهدات سلسلة ماركوفية معينة ذات فضاء حالة مؤلف مـن N من الحالات، فان ذلك يتطلّب حساب قيمة معيـار AIC(m) عنـد كـل قيمـة للمَرتبة المفروضة m، إذ أن $m=0,1,2\ldots,m_{max}$، وأن m_{max} هي أعلـى مرتبـة مفروضة. وفي كل مرة من هذه الحسابات فيجب تكوين مصفوفة انتقالية ذات بعـد $N^m \times N^m$ ، مما يزيد من صعوبة الحسابات عندما تكون المرتبة الحقيقيـة عاليـة. وهذه المسألة تجعل من استخدام الحاسوب أمراً ضـرورياً. والخوارزميـة الآتيـة تلخص خطوات طريقة مقدر أدنى AIC لمَرتبة سلسلة ماركوف.

الخوارزمية (1): تقدير مَرتبة سلسلة ماركوف بطريقة AIC.

الخطوة (1): إدخال سلسلة ماركوف(المشاهدات) .

الخطوة (2): إدخل الحد الأعلى لرتبة ماركوف**.**

الخطوة (3): تكون مصفوفة u التي تستخدم في حساب قيمة نيتا η(neta) **.**

الخطوة (4): حساب درجات الحرية (Degrees of Freedom) .

الخطوة (5): حساب إحصاءة نسبة الترجيح (Likelihood Ratio Statistic) **.**

الخطوة (6): حساب قيمة معيار AIC حسب القانون الاتي :

$$AIC(M) = Likelihood\ Ratio\ Statistic - 2(Degrees\ of\ Freedom).$$

الخطوة (7): إيجاد اصغر قيمة لـلمعيار AIC .

الخطوة (8): عرض النتائج.

3- الجانب الحاسوبي:

تم بناء برنامج حاسوبي متكامل ويعمل ذاتيا وفق الخوارزمية المقترحة وذلك باستخدام لغة MATLAB2009a. وكل ما يتطلبه تشغيل هذا البرنامج إدخال ما يأتي:

1- أعلى مرتبة متوقعة، MAXORDER، ويفضل أن لا تزيد قيمة هذه المعلمة على 10.

2- المشاهدات، OBSERVATIONS، التي تمثل المشاهدات (البيانات) الملاحظة والمأخوذة من نموذج ماركوفي ذي فضاء حالة $S=\{1,2,\dots,N\}$. إن هذه المشاهدات يجب أن تكون بشكل أعداد صحيحة متماثلة تماما في عناصرها مع عناصر فضاء الحالة.

أما مخرجات البرنامج، فهي على النحو الآتي:

1- جدول يتضمن إحصاءة الترجيح Likelihood Statistic وعدد درجات الحرية Degrees of Freedom.

2- جدول يتضمن قيم معيار **AIC** المقابلة لكل مرتبة Markov Order مختارة.

3- خلاصة تتضمن أفضل اختيار للمرتبة وقيمة معيار **AIC** المقابلة وكذلك عدد درجات الحرية.

4- رسم يوضح قيم معيار AIC مقابل كل مرتبة.

ونشير إلى انه إذا كانت المرتبة الحقيقية أكبر من أعلى مرتبة متوقعة، فان البرنامج سوف يشير إلى ذلك، وعندئذ يجب زيادة قيمة أعلى مرتبة متوقعة MAXORDER وتشغيل البرنامج من جديد.

4- الجانب العملي:

اجريت تجربة محاكاة على عدد من النماذج الماركوفية ذوات المرتبـة المعروفـة مسبقا، وهذه النماذج عدد عناصر فضاء الحالة فيها N=2,3,4,5. جميع النمـاذج قيد الدراسة ذوات مرتبة 1، وقد تم توليد مـشاهدات ذوات حجـوم 2000 وذلـك باستخدام برنامج حاسوبي خاص من الخياط (2011):

النموذج الأول: N=2، فضاء الحالة S={1,2} والمصفوفة الانتقالية هي:

$$\underline{P}=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}.$$

النموذج الثاني: N=3، فضاء الحالة S={1,2,3} والمصفوفة الانتقالية هي:

$$\underline{P}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\end{pmatrix}.$$

النموذج الثالث: N=4، فضاء الحالة S={1,2,3,4} والمصفوفة الانتقالية هي:

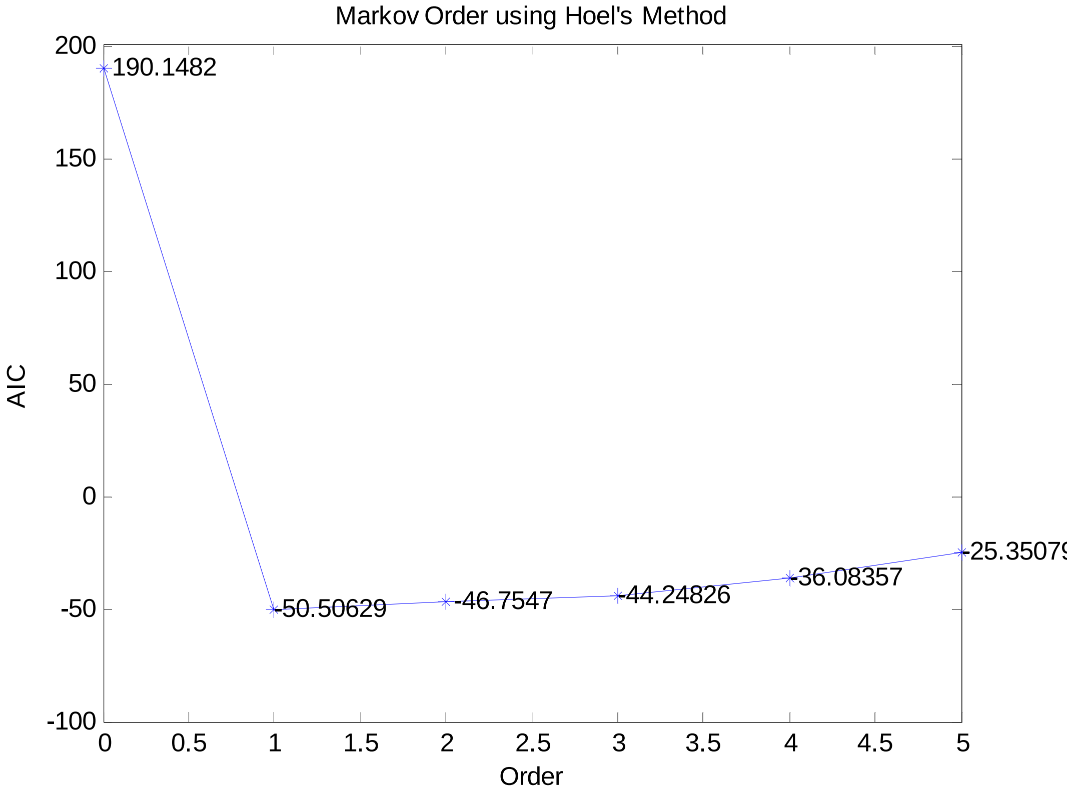
$$\underline{P}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1\\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4\\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1\end{pmatrix}.$$

النموذج الرابع: N=5، فضاء الحالة S={1,2,3,4,5} والمصفوفة الانتقالية هي:

$$\underline{P}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.1\\ 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1\end{pmatrix}.$$

وبعد تنفيذ البرنامج على النموذج الأول أعطى النتائج الآتية:

```
###############  Order Estimation by  AIC ##################
Likelihood Statistic    Degrees of Freedom
====================    ==================
242.654476              1
242.902885              3
248.396447              7
256.231755             15
277.498970             31
316.148185             63
0.248409                2
5.741971                6
13.577279              14
34.844494              30
73.493709              62
5.493562                4
13.328871              12
34.596085              28
73.245300              60
7.835308                8
29.102523              24
67.751737              56
21.267214              16
59.916429              48
38.649215              32
0.000000                0
-------------------------------------------
Markov Order      AIC
============   ============
    0            190.148185
    1            -50.506291
    2            -46.754700
    3            -44.248263
    4            -36.083571
    5            -25.350785
    6            0.000000
The best choice when:
 Markov Order=      1
 AIC =      -50.506291
  Degrees of Freedom =     62
############################################################
```



أما باقي النماذج الأربع الأخر فنتائجها مماثلة للنموذج الأول. والجدول الآتي يلخص نتائج النماذج الخمس السابقة.

الجدول(1): تقدير مرتبات النماذج الماركوفية الخمس في تجربة المحاكاة.

النموذج	N	القيمة الدنيا من AIC	المرتبة المقدرة
الأول	2	-50.506291	1
الثاني	3	-1768.215947	1
الثالث	4	-21010.389249	1
الرابع	5	-21149.261648	1

وكما هو واضح من النتائج السابقة فان البرنامج قد نجح في تقدير المرتبة الصحيحة لجميع النماذج المولَدة بالمحاكاة.

5- الجانب التطبيقي (الحالة المطرية في مدينة الموصل):

تعد الأمطار من الظواهر المائية الحيوية البالغة الأهمية والتي يختلف سلوكها باختلاف المناطق. وفي مدينة الموصل فان السنة المطرية تتألف من سبعة أشهر، بدءاً بالشهر العاشر (كانون الأول) ولغاية الشهر الخامس (آذار). إن الميزة الأساسية لظاهرة الأمطار أنها ظاهرة غير متصلة، إذ أن هناك مدة زمنية، تختلف باختلاف المناطق، لا تسقط فيها الأمطار. وهذه الميزة تسبب إشكالات كبيرة من الناحية الإحصائية عند نمذجة هذه الظاهرة. وقد تم الحصول على مشاهدات واقعية لكمية الأمطار اليومية الساقطة على مدينة الموصل للمدة من عام 1994 ولغاية عام 2000 ، وهذه المشاهدات تمثل كمية الأمطار اليومية الساقطة في السنوات المطرية المذكورة سابقاً، والبيانات موجودة في الخياط وسليمان (2011). وقد قام الباحثان الخياط وسليمان (2011) بدراسة جانب إحصائي آخر يتعلق بهذه المشاهدات، هو التنبؤ بالحالة المطرية.

في هذه الورقة البحثية نقترح نمذجة ظاهرة الأمطار وفق نموذجين ماركوفيين:

النموذج الأول: في هذا النموذج تُحول الأمطار في مدينة الموصل إلى حالتين:

الحالة 1: لا توجد أمطار.

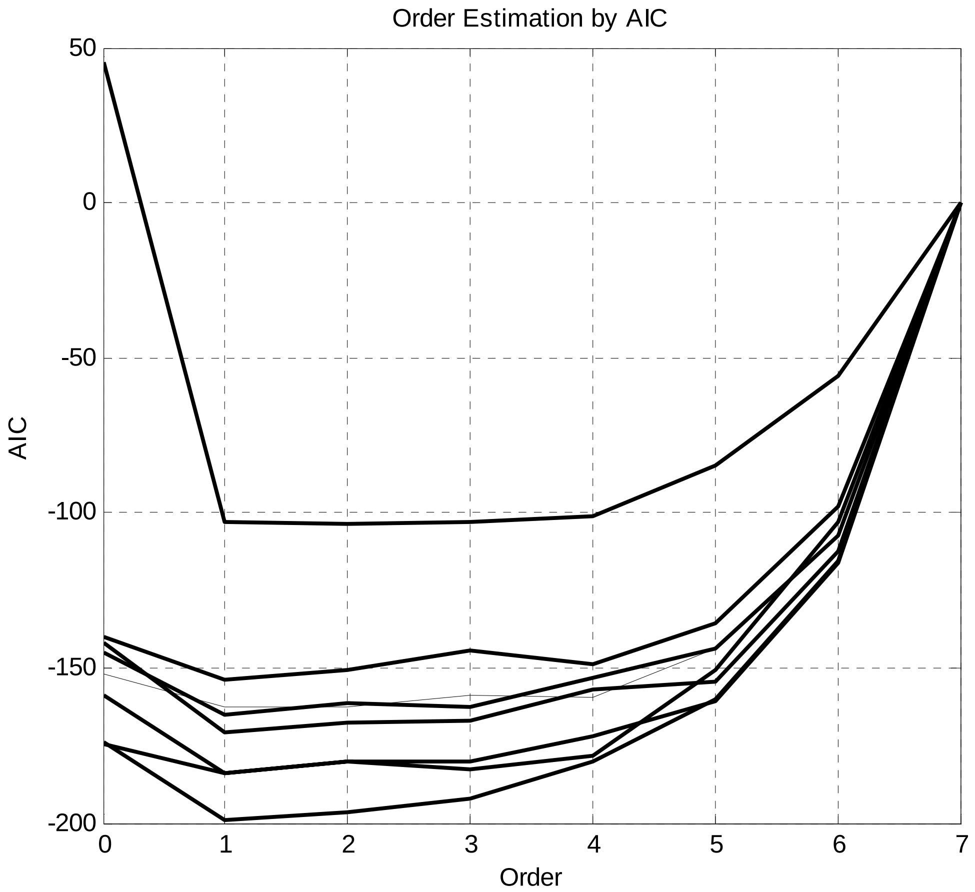
الحالة2: توجد أمطار.

والجدول الآتي يلخص نتائج البرنامج الخاص بتقدير المرتبة لكل سنة على حدة، وكذلك للسنين السبع مجتمعة.

الجدول(2): تقدير مرتبة النموذج الماركوفي الأول للأمطار في مدينة الموصل.

السنة	القيمة الدنيا من AIC	المرتبة المقدرة
1994	-153.743862	1
1995	-198.809068	1
1996	-162.702868	1
1997	-170.550332	1
1998	-165.033186	1
1999	-184.028329	1
2000	-183.868921	1
2000-1994	-103.764380	2

والشكل الآتي يبين قيم معيار AIC المقابلة للمرتبات المختارة.



وكما هو واضح فان المَرتبة المقدرة للأمطار اليومية لكل سنة من السنين السبع هي المَرتبة الأولى، أما للسنين السبع معا فهي المَرتبة الثانية. ونشير إلى أن نتيجة الحاسوب لمشاهدات السنين السبع هي:

Markov Order	AIC
0	45.037998
1	-102.726967
2	-103.764380
3	-102.955127
4	-101.089109
5	-84.423327
6	-55.693412
7	0.000000

فكما هو واضح فان قيم معيار AIC عند المرتبات 1 و 2 و 3 و 4 متقاربة مع بعضها البعض مما يشير إلى أن كلاً من هذه المرتبات "متكافئة تقريبا". هذه الصورة أيضا واضحة في الشكل السابق فيما يتعلق بالسنوات السبع منفردة.

النموذج الثاني: هذا النموذج اقترحه الخياط وسليمان (2011)، وفيه تُحول الأمطار في مدينة الموصل إلى أربع حالات مطرية، وهي كما يأتي:

الحالة 1: لا توجد أمطار.

الحالة 2: أمطار خفيفة، كمية الأمطار الساقطة اقل من 2.5 ملم.

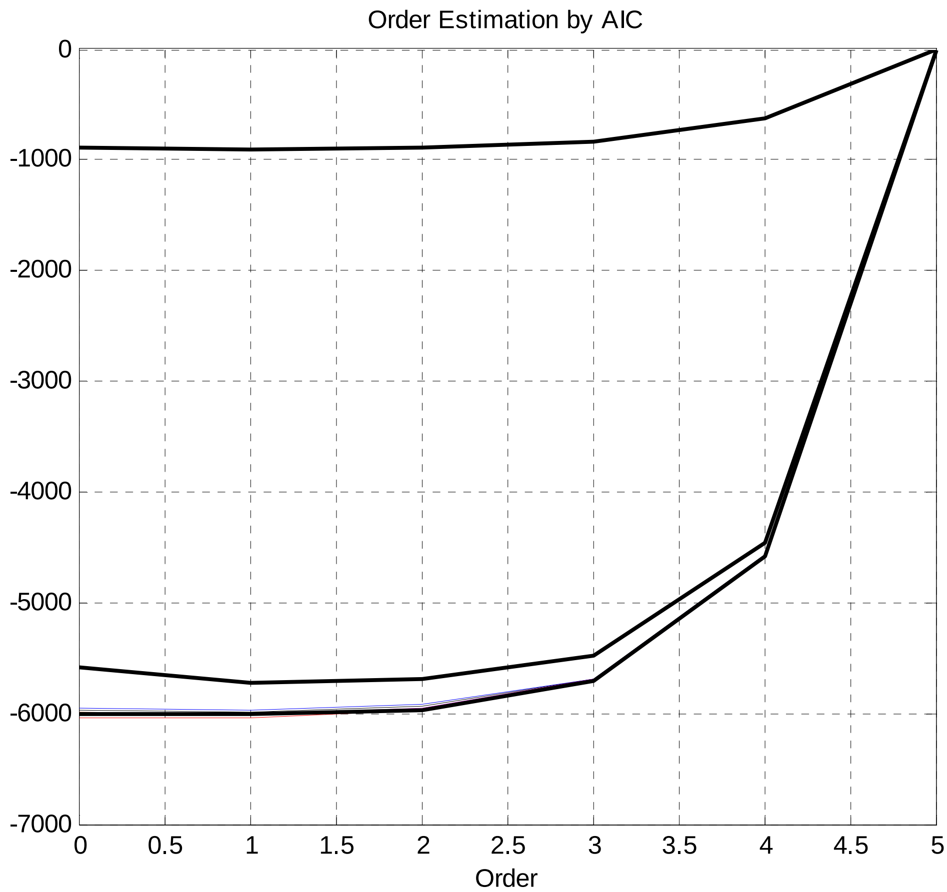
الحالة 3: أمطار معتدلة، كمية الأمطار الساقطة بين 2.5 ملم و 7.5 ملم.

الحالة 4: أمطار غزيرة، كمية الأمطار الساقطة أكثر من 7.5 ملم.

والجدول الآتي يلخص نتائج البرنامج الخاص بتقدير المرتبة لكل سنة على حدة، وكذلك للسنين السبع مجتمعة.

الجدول(3): تقدير مرتبة النموذج الماركوفي الأول للأمطار في مدينة الموصل.

السنة	القيمة الدنيا من AIC	المرتبة المقدرة
1994	-5968.534828	1
1995	-904.055822	1
1996	-6041.595986	1
1997	-5996.325745	1
1998	-6007.520813	1
1999	-6010.174176	1
2000	-6009.920066	1
2000-1994	-5731.072547	1



6- المناقشة والاستنتاجات والتوصيات:

تناولت هذه الورقة البحثية مسألة ذات أهمية خاصة في المجـالات التطبيقيـة، ألا وهي مسألة تقدير مَرتبات السلاسل الماركوفية. إن أهمية هذه المسألة تكمـن فـي تقدير عدد "الحالات السابقة" التي تعتمد عليها "الحالة الحالية" للسلسلة الماركوفيـة. وقد تم اختبار البرنامج المعد مع نماذج محاولة يدويا وتم التأكد من دقة نتائجه. أما وقت تنفيذ البرنامج فهو يعتمد على حجوم المشاهدات وكذلك على أعلـى مَرتبـة مفروضة. ونشير إلى انه، حسب علمنا، لا يوجد برنامج جاهز يقوم بإيجاد مَرتبـة

سلسلة ماركوف في أي من البرمجيات الجاهزة أو المتداولة، لذا فهو يسد فراغا كبيرا في هذا المضمار، ويقدم خدمات جليلة للباحثين دون مشقة أو عناء.

لقد أشار الباحث الخياط(2011) إلى الربط بين تقدير المرتبة واختبار العشوائية Test of Randomness. فعندما يَعطي البرنامج الذي تم بناؤه في هذا البحث مرتبة صفرية، فان هذا يعني ان المشاهدات هي غير مترابطة مع بعضها البعض، أي أنها عشوائية. وقد اختبر ذلك عمليا بالمحاكاة وتبينت مصداقيته. لذا نوصي بان يستهل أي تحليل يتعلق بتقدير المرتبة باختبار العشوائية، فإذا تبينت عشوائية المشاهدات فإننا نتوقف لعدم جدوى إيجاد المرتبة. أما إذا تبين عدم عشوائية (ترابط) المشاهدات، فعلينا المضي قدما واستخدام البرنامج المعد في هذا البحث لإيجاد المرتبة المناسبة التي سوف تحدد طبيعة النموذج الماركوفي بعدئذ.

إن أهم استنتاج في هذه الورقة البحثية هو انه في متناولنا ألان برنامج جاهز بإمكانه إيجاد المرتبة المناسبة للنموذج الماركوفي بيسر، وكانت هذه المسألة من العوائق التي تقف أمام الباحثين (انظر على سبيل المثال رسالة الماجستير غير المنشورة للباحثة فاطمة محمود حسن (2010) والتي واجهتها مثل هذه العوائق). أما أهم التوصيات فهي استخدام البرنامج المعد في هذه الورقة البحثية، ويمكن الحصول على نسخة منه من الباحثين مباشرة، كما انه سوف يكون معروضا في كتاب الباحث الخياط (2011).

المصادر

1- الخياط، باسل يونس ذنون "**النمذجة الماركوفية مع تطبيقات عملية**"، دار الكتب للطباعة والنشر، الموصل (تحت الطبع)، 2011.

2- الخياط، باسل يونس ذنون، و سليمان، مثنى صبحي " **التنبؤ عن الحالات المطرية في مدينة الموصل**"، بحث مقدم إلى المؤتمر العلمي الثالث للعلوم الرياضية، جامعة الزرقاء، 27-28 نيسان ، 2011.

3- الكسو، ابتهاج عبد الحميد "**إستخدام الشبكات العصبية في تقدير رتب سلاسل ماركوف مع التطبيق على سلسلة جبل بطمة في محافظة الموصل**"، أطروحة دكتوراه غير منشورة ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، 2005.

4-Anderson, T. W. and Goodman, L. A.,(1957): **“Statistical Inference about Markov Chains”**, Ann. Math. Statist, 28, 89-110.

5-Bartelett, M. S. ,(1951): **“The Frequency Goodness of Fit Test for Probability Chains”**, Proc. Camb. Phil., Soc., 47, 89-95.

6-Gain, J. ,(1955): **“Some theorems and Sufficiency conditions for the maximum likelihood estimator of an unknown parameter in a simple Markov chain”**. Biometrika, 42, 342-359.

7-Gates, P. ,(1975): **“An Examination into the Determination of the Order of A Markov Chain Using Akaike’s Information Criterion”**, Unpublished M.Sc. Dissertation, University of Manchester, UK.

8- Hole, P. G., ,(1954): **“A Test for Markov Chains”**, Biometrika, 41, 430-433.

9-Miller, G. A. and Frank, F. C., ,(1949): **“Statistical Behaviouristics and Sequence of Responses”**, Psychol. Rev., 56, 311-324.

10-Tong, H. (1975). “**Determination of thr Order of a Markov Chain by Using Akaike’s Information Criterion**”, J. Appl. Prob. 12, pp. 488-497.