الحل الدوري لبعض أنظمة المعادلات التكاملية–التفاضلية اللاخطية من نوع فولتيرا

رعد نوري بطرس وغادة شكر جميل

قسم الرياضيات / كلية التربية / جامعة الموصل

الاستلام	القبول
09/11/2006	09/05/2007

ABSTRACT

In this paper we investigate the existence and approximation of the periodic solution for a system of nonlinear integro-differential equations of Volterra type. The numerical-analytic method has been used to study the periodic solutions of the non-linear ordinary differential equations that were introduced by A.M. Samoilenko.

الملخص

في هذا البحث تم دراسة وجود وتقريب الحل الدوري لنظام من المعادلات التكاملية–التفاضلية اللاخطية من نوع فولتيرا. وذلك بالاعتماد على الطريقة التحليلية–العددية لدراسة الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية لـ A.M. Samoilenko.

المقدمة

لقد كانت المعادلات التكاملية–التفاضلية مادةً أساسية في فهم العديد من المسائل الفيزيائية والرياضية. ففي مطلع القرن العشرين شرع كل من العالم الإيطالي فولتيرا (V. Volterra) والعالم السويدي فريدهولم (I. Fredholm) في وضع هذه المعادلات أي المعادلات التكاملية–التفاضلية واستخدامها في دراستهما، فكان أثرهما كبيراً في تطوير المعادلات التكاملية–التفاضلية التي كان لها دور بارز في بناء التحليل الرياضي والدالي[3].

وبعد ذلك اقترح Samoilenko [6] الطريقة التحليلية–العددية للبحث عن الحلول الدورية لمرتبة معلومة من أنظمة المعادلات التكاملية–التفاضلية اللاخطية والتي تضمنت متتابعات منتظمة للدوال الدورية، إن ما نتج من تلك الدراسة هو استخدام الحلول الدورية وبشكل واسع النطاق [2,1] في مختلف المعالجات العلمية والعملية.

ندرس في هذا البحث نظام المعادلات التكامليـــة–التفاضلية اللاخطية من الشكل أدناه:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + f\left(t, x, y, \int_{-\infty}^{t} u(t,s,\tau)h\big(\tau, x(\tau), y(\tau)\big)d\tau\right)\\ \frac{dy}{dt} &= B(t)y(t) + g\left(t, x, y, \int_{-\infty}^{t} u(t,s,\tau)h\big(\tau, x(\tau), y(\tau)\big)d\tau\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

حيث ان $x \in D \subseteq R^n$ ، $y \in D_1 \subseteq R^n$ ، $z \in D_2 \subseteq R^n$.

وان D يمثل مجالاً مغلقاً ومقيداً، والدالتان المتجهتان $f(t,x,y,z)$ ، $g(t,x,y,z)$ حيث $z = \int_{-\infty}^{t} u(t,s,\tau)h\big(\tau, x(\tau), y(\tau)\big)d\tau$ معرفتان في المجال:

$$(t,x,y,z) \in R^1 \times D \times D_1 \times D_2 \qquad \ldots\ldots (2)$$

مستمرتان ودوريتان في t ذات دور يساوي T. إذ ان D_1 ، D_2 مجالان محددان وجزئيان في الفضـــاء الأقليدي R^n .

بافتراض أن كل الدوال في النظام (1) تحقق المتباينات الآتية:

$$\|f(t,x,y,z)\| \le M_1 \quad , \quad \|g(t,x,y,z)\| \le M_2 \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$\|f(t,x_1,y_1,z_1) - f(t,x_2,y_2,z_2)\| \le K_1\|x_1 - x_2\| + K_2\|y_1 - y_2\| + K_3\|z_1 - z_2\| \qquad \ldots\ldots (4)$$

$$\|g(t,x_1,y_1,z_1) - g(t,x_2,y_2,z_2)\| \le L_1\|x_1 - x_2\| + L_2\|y_1 - y_2\| + L_3\|z_1 - z_2\| \qquad \ldots\ldots (5)$$

$$\|h(\tau,x_1,y_1) - h(\tau,x_2,y_2)\| \le N_1\|x_1 - x_2\| + N_2\|y_1 - y_2\| \qquad \ldots\ldots (6)$$

لكل $t,s,\tau \in [0,T]$ ، $x, x_1, x_2 \in D$ ، $y, y_1, y_2 \in D_1$ و $z, z_1, z_2 \in D_2$ حيث ان كل مـــن M_1 ، M_2 و K_1 ، K_2 ، K_3 و L_1 ، L_2 ، L_3 و N_1 ، N_2 هـــي ثوابـــت موجبة. المصفوفة $u(t,s,\tau)$ معرفة ومستمرة في $R^1 \times R^1$ وتحقق الشرط الآتي:

$$u(t+T, s+T, \tau+T) = u(t,s,\tau) \qquad \ldots\ldots (7)$$

وبافتراض ان كل من $A(t)$ ، $B(t)$ هما مصفوفتان موجبتان لكـــل منهمـــا ســـعة $n \times n$ معرفتان في المجال (2) ، مستمرتان ودوريتان عنـــد τ, s, t وانهمـــا تحققـــان المتبـــاينتين الآتيتين:

$$\left\|e^{A(t-s-\tau)}\right\| \le Q_1 \quad , \quad \left\|e^{B(t-s-\tau)}\right\| \le Q_2 \qquad \ldots\ldots (8)$$

حيث ان $-\infty \le 0 \le \tau \le s \le t \le T < \infty$ ، $\|u(t,s,\tau)\| \le \delta e^{-\gamma(t-s-\tau)}$ ، وكل من γ ، δ ، Q_1 ، Q_2 يمثل ثابت موجب.

سوف نعرف المجاميع غير الخالية كالآتي:

$$\left.\begin{aligned} D_f &= D - \frac{\|A\| T^2 Q_1^2}{2(1+Q_1)} M_1 \\ D_{1f} &= D_1 - \frac{\|B\| T^2 Q_2^2}{2(1+Q_2)} M_2 \\ D_{2f} &= D_2 - \frac{\delta}{\gamma} e^{\gamma T}\left[N_1 \frac{\|A\| T^2 Q_1^2}{2(1+Q_1)} M_1 + N_2 \frac{\|B\| T^2 Q_2^2}{2(1+Q_2)} M_2 \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

إذ ان $\|\cdot\| = \max_{t\in[0,T]} |\cdot|$.

فضلاً عن ذلك نفترض ان القيمة العظمى للمصفوفة الآتية:

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \frac{\|A\| T^2 Q_1^2}{2(1+Q_1)}(K_1 + K_3 \frac{\delta}{\gamma} e^{\gamma T} N_1) & \frac{\|A\| T^2 Q_1^2}{2(1+Q_1)}(K_2 + K_3 \frac{\delta}{\gamma} e^{\gamma T} N_2) \\ \frac{\|B\| T^2 Q_2^2}{2(1+Q_2)}(L_1 + L_3 \frac{\delta}{\gamma} e^{\gamma T} N_1) & \frac{\|B\| T^2 Q_2^2}{2(1+Q_2)}(L_2 + L_3 \frac{\delta}{\gamma} e^{\gamma T} N_2) \end{pmatrix}$$

أقل من الواحد أي ان

$$\lambda_{\max}(\Lambda_0) < 1 \quad \ldots\ldots (10)$$

مأخوذة 1 :

لتكن $f(t,x,y,z)$ دالة متجهة مستمرة ومعرفة في الفترة $[0,T]$ ودورية في t ذات دور يساوي T عندئذ المتباينة الآتية:

$$\left\| \int_0^t e^{A(t-s-\tau)} \left[f(\tau,x,y,z) - \int_0^T \frac{A}{E+e^{AT}} e^{A(T-s-\tau)} f(\tau,x,y,z) d\tau \right] d\tau \right\| \le \alpha_1(t) M_1$$

تتحقق لكل $t \in [0,T]$ ، $\alpha_1(t) \le \frac{\|A\| T^2 Q_1^2}{2(1+Q_1)}$ ، حيث ان $M_1 = \max_t \| f(t,x,y,z) \|$

و $\alpha_1(t) = \left(tQ_1 + \frac{\|A\|(T^2 - 2t^2) Q_1^2}{2(1+Q_1)} \right)$.

البرهان:

من المتباينة الآتية:

$$\left\| \int_0^t e^{A(t-s-\tau)} \left[f(\tau,x,y,z) - \int_0^T \frac{A}{E+e^{AT}} e^{A(T-s-\tau)} f(\tau,x,y,z) d\tau \right] d\tau \right\| \le$$

$$\leq \int_0^t \left\| e^{A(t-s-\tau)}\left(E-\frac{A\tau}{E+e^{AT}}e^{A(t-s-\tau)}\right) f(\tau,x,y,z)\right\| d\tau + \int_t^T \left\| \frac{A\tau}{E+e^{AT}} e^{2A(t-s-\tau)} f(\tau,x,y,z)\right\| d\tau$$

نحصل على

$$\leq \int_0^t \left\| \left(E-\frac{A\tau}{E+e^{AT}}e^{A(t-s-\tau)}\right) e^{A(t-s-\tau)}\right\| \left\| f(\tau,x,y,z)\right\| d\tau + \int_t^T \left\| \frac{A\tau}{E+e^{AT}} e^{2A(t-s-\tau)}\right\| \left\| f(\tau,x,y,z)\right\| d\tau$$

إذن

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \left(1-\frac{\|A\|\tau}{1+Q_1}Q_1\right) Q_1 M_1 d\tau + \int_t^T \frac{\|A\|\tau}{1+Q_1} Q_1^2 M_1 d\tau \\
&= tQ_1M_1 - \frac{\|A\|t^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 + \frac{\|A\|\left(T^2-t^2\right)Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 \\
&= tQ_1M_1 - \frac{\|A\|t^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 + \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 - \frac{\|A\|t^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 \\
&= tQ_1M_1 - \frac{2\|A\|t^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 + \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 \\
&= \left(tQ_1 + \frac{\|A\|\left(T^2-2t^2\right)Q_1^2}{2(1+Q_1)}\right)M_1 \\
&= \alpha_1(t)M_1
\end{aligned}$$

مأخوذة 2 :

لتكن $g(t,x,y,z)$ دالة متجهة مستمرة ومعرفة في الفترة $[0,T]$ ودورية في t ذات دور يساوي T عندئذ المتباينة الآتية:

$$\left\| \int_0^t e^{B(t-s-\tau)}\left[g(\tau,x,y,z) - \int_0^T \frac{B}{E+e^{BT}} e^{B(T-s-\tau)} g(\tau,x,y,z)d\tau \right] d\tau \right\| \leq \alpha_2(t)M_2$$

تتحقق لكل $t\in[0,T]$ ، $\alpha_2(t)\leq \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}$ ، حيث ان $M_2=\max_t \|g(t,x,y,z)\|$

و $\alpha_2(t)=\left(tQ_2+\frac{\|B\|(T^2-2t^2)Q_2^2}{2(1+Q_2)}\right)$.

البرهان:

مباشر من المتباينة الآتية:

$$\left\| \int_0^t e^{B(t-s-\tau)}\left[g(\tau,x,y,z) - \int_0^T \frac{B}{E+e^{BT}} e^{B(T-s-\tau)} g(\tau,x,y,z)d\tau \right] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^t \left\| e^{B(t-s-\tau)}\left(E-\frac{B\tau}{E+e^{BT}}e^{B(t-s-\tau)}\right)g(\tau,x,y,z)\right\| d\tau + \int_t^T \left\| \frac{B\tau}{E+e^{BT}}e^{2B(t-s-\tau)}g(\tau,x,y,z)\right\| d\tau$$

نحصل على

$$\leq \int_0^t \left\| \left(E-\frac{B\tau}{E+e^{BT}}e^{B(t-s-\tau)}\right)e^{B(t-s-\tau)}\right\| \|g(\tau,x,y,z)\| d\tau + \int_t^T \left\| \frac{B\tau}{E+e^{BT}}e^{2B(t-s-\tau)}\right\| \|g(\tau,x,y,z)\| d\tau$$

إذن

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \left(1-\frac{\|B\|\tau}{1+Q_2}Q_2\right)Q_2M_2 d\tau + \int_t^T \frac{\|B\|\tau}{1+Q_2}Q_2^2M_2 d\tau \\
&= tQ_2M_2 - \frac{\|B\|t^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 + \frac{\|B\|\left(T^2-t^2\right)Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 \\
&= tQ_2M_2 - \frac{\|B\|t^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 + \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 - \frac{\|B\|t^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 \\
&= tQ_2M_2 - \frac{2\|B\|t^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 + \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 \\
&= \left(tQ_2 + \frac{\|B\|\left(T^2-2t^2\right)Q_2^2}{2(1+Q_2)}\right)M_2 \\
&= \alpha_2(t)M_2
\end{aligned}$$

البند الأول: الحل التقريبي الدوري للنظام (1)

مبرهنة 1 :

إذا كان النظام (1) يحقق المتباينات (3) ، (4) ، (5) ، (6) و (8) والشرط (7) فإن متتابعات الدوال:

$$x_{m+1}(t,x_0,y_0) = x_0 + \int_0^t e^{A(t-s-\tau)}\Big[f\big(\tau,x_m(\tau,x_0,y_0),y_m(\tau,x_0,y_0),z_m(\tau,x_0,y_0)\big) - \\ - \int_0^T \frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)} f\big(\tau,x_m(\tau,x_0,y_0),y_m(\tau,x_0,y_0),z_m(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\Big]d\tau$$

مع $x_0(t,x_0) = x_0e^{At}$, m=0,1,2,…

…… (11)

$$y_{m+1}(t,x_0,y_0) = y_0 + \int_0^t e^{B(t-s-\tau)}\Big[g\big(\tau,x_m(\tau,x_0,y_0),y_m(\tau,x_0,y_0),z_m(\tau,x_0,y_0)\big) - \\ - \int_0^T \frac{B}{E+e^{BT}}e^{B(T-s-\tau)} g\big(\tau,x_m(\tau,x_0,y_0),y_m(\tau,x_0,y_0),z_m(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\Big]d\tau$$

مع $y_0(t,x_0)=y_0e^{Bt}$, m=0,1,2,…

…… (12)

دورية في t ذات دورة تساوي T ، ومتقاربة بانتظام عندما $m\to\infty$ في المجال:

$$(t,x_0,y_0)\in R^1\times D_f\times D_{1f} \qquad \text{…… (13)}$$

في كل من الدالة $x^0(t,x_0,y_0)$ ، $y^0(t,x_0,y_0)$ المعرفة في المجال (13) ، المستمرة والدورية في t ذات دورة تساوي T والتي تحقق نظام المعادلات التكاملية:

$$x(t,x_0,y_0)=x_0+\int_0^t e^{A(t-s-\tau)}\Big[f\big(\tau,x(\tau,x_0,y_0),y(\tau,x_0,y_0),z(\tau,x_0,y_0)\big)-$$
$$-\int_0^T\frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)}f\big(\tau,x(\tau,x_0,y_0),y(\tau,x_0,y_0),z(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\Big]d\tau$$

…… (14)

$$y(t,x_0,y_0)=y_0+\int_0^t e^{B(t-s-\tau)}\Big[g\big(\tau,x(\tau,x_0,y_0),y(\tau,x_0,y_0),z(\tau,x_0,y_0)\big)-$$
$$-\int_0^T\frac{B}{E+e^{BT}}e^{B(T-s-\tau)}g\big(\tau,x(\tau,x_0,y_0),y(\tau,x_0,y_0),z(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\Big]d\tau$$

…… (15)

والذي هو حل وحيد للنظام (1) بشرط أن يحقق المتباينات الآتية:

$$\|x_\infty(t,x_0,y_0)-x_0\|\le\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 \qquad \text{…… (16)}$$

$$\|y_\infty(t,x_0,y_0)-y_0\|\le\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 \qquad \text{…… (17)}$$

$$\begin{pmatrix}\|x_\infty(t,x_0,y_0)-x_m(t,x_0,y_0)\|\\ \|y_\infty(t,x_0,y_0)-y_m(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix}\le\Lambda_0^m(E-\Lambda_0)^{-1}V_0 \qquad \text{…… (18)}$$

لكل $t\in[0,T]$ ، $x_0\in D_f$ ، $y_0\in D_{1f}$ ، إذ ان

$$\Lambda_0=\begin{pmatrix}\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2)\\ \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2)\end{pmatrix},$$

$$V_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\|A\| T^2 Q_1^2}{2(1+Q_1)} M_1 \\ \dfrac{\|B\| T^2 Q_2^2}{2(1+Q_2)} M_2 \end{pmatrix}$$

البرهان:

باستخدام المأخوذة 1 وبواسطة المتتابعة (11)، عندما m=0 نحصل على

$$\|x_1(t,x_0,y_0)-x_0\| = \Big\| x_0 + \int_0^t e^{A(t-s-\tau)}\big[f\big(\tau, x_0(\tau,x_0,y_0), y_0(\tau,x_0,y_0), z_0(\tau,x_0,y_0)\big) -$$

$$-\int_0^T \frac{A}{E+e^{AT}} e^{A(T-s-\tau)} g\big(\tau, x_0(\tau,x_0,y_0), y_0(\tau,x_0,y_0), z_0(\tau,x_0,y_0)\big) d\tau \big] d\tau - x_0 \Big\|$$

إذن

$$\|x_1(t,x_0,y_0)-x_0\| \le \left(tQ_1 + \frac{\|A\|(T^2-2t^2)}{2(1+Q_1)} Q_1^2 \right) M_1 = \alpha_1(t) M_1 \qquad \ldots\ldots (19)$$

كذلك باستخدام المأخوذة 2 وبواسطة المتتابعة (12)، عندما m=0 نحصل على

$$\|y_1(t,x_0,y_0)-y_0\| = \Big\| y_0 + \int_0^t e^{B(t-s-\tau)}\big[g\big(\tau, x_0(\tau,x_0,y_0), y_0(\tau,x_0,y_0), z_0(\tau,x_0,y_0)\big) -$$

$$-\int_0^T \frac{B}{E+e^{BT}} e^{B(T-s-\tau)} g\big(\tau, x_0(\tau,x_0,y_0), y_0(\tau,x_0,y_0), z_0(\tau,x_0,y_0)\big) d\tau \big] d\tau - y_0 \Big\|$$

إذن

$$\|y_1(t,x_0,y_0)-y_0\| \le \left(tQ_2 + \frac{\|B\|(T^2-2t^2)}{2(1+Q_2)} Q_2^2 \right) M_2 = \alpha_2(t) M_2 \qquad \ldots\ldots (20)$$

كذلك من المتباينات (6) ، (19) و (20) نحصل على

$$\|z_1(\tau,x_0,y_0)-z_0(\tau)\| = \Big\| \int_{-\infty}^t u(t,s,\tau) h(\tau,x_1,y_1) d\tau - \int_{-\infty}^t u(t,s,\tau) h(\tau,x_0,y_0) d\tau \Big\|$$

$$\le \int_{-\infty}^t \|u(t,s,\tau)\| \|h(\tau,x_1,y_1) - h(\tau,x_0,y_0)\| d\tau$$

$$\le \int_{-\infty}^t \delta e^{-\gamma(t-s-\tau)} \big[N_1 \|x_1 - x_0\| + N_2 \|y_1 - y_0\| \big] d\tau$$

$$\le \frac{\delta}{\gamma} e^{\gamma T} \big[N_1 \alpha_1(t) M_1 + N_2 \alpha_2(t) M_2 \big]$$

إذن

$$\|z_1(\tau,x_0,y_0)-z_0(\tau)\|\le\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\left[N_1\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1+N_2\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2\right]\quad\ldots\ldots(21)$$

إذ ان $x_1(t,x_0,y_0)\in D$ ، $y_1(t,x_0,y_0)\in D_1$ لكل $t\in R^1$ ، $x_0\in D_f$ ، $y_0\in D_{1f}$

و $z_0(\tau)=\int_{-\infty}^{t}u(t,s,\tau)h(\tau,x_0,y_0)d\tau\in D_{2f}$.

نفترض ان $x_{m-1}(t,x_0,y_0)\in D$ ، $y_{m-1}(t,x_0,y_0)\in D_1$ ينتج لدينا

$$\|x_m(t,x_0,y_0)-x_0\|\le\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1$$

$$\|y_m(t,x_0,y_0)-y_0\|\le\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2$$

$$\|z_m(\tau,x_0,y_0)-z_0(\tau)\|\le\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\left[N_1\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1+N_2\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2\right]$$

إذ ان $x_m(t,x_0,y_0)\in D$ ، $y_m(t,x_0,y_0)\in D_1$ ، $z_m(\tau,x_0,y_0)\in D_2$ لكل $t\in R^1$ ،

$x_0\in D_f$ ، $y_0\in D_{1f}$ ، $z_0(\tau)\in D_{2f}$.

الآن نبرهن ان كلا من المتتابعات (11) و (12) متقاربة بانتظام في المجال (13).

بواسطة المأخوذة (1) ومن المتتابعة (11) عندما m=1 نجد ان:

$$\begin{aligned}\|x_2(t,x_0,y_0)-x_1(t,x_0,y_0)\|=\Big\|x_0&+\int_0^t e^{A(t-s-\tau)}\big[f\big(\tau,x_1(\tau,x_0,y_0),y_1(\tau,x_0,y_0),z_1(\tau,x_0,y_0)\big)-\\&-\int_0^T\frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)}f\big(\tau,x_1(\tau,x_0,y_0),y_1(\tau,x_0,y_0),z_1(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\big]d\tau-\\&-x_0-\int_0^t e^{A(t-s-\tau)}\big[f\big(\tau,x_0(\tau,x_0,y_0),y_0(\tau,x_0,y_0),z_0(\tau,x_0,y_0)\big)+\\&+\int_0^T\frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)}f\big(\tau,x_0(\tau,x_0,y_0),y_0(\tau,x_0,y_0),z_0(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\big]d\tau\Big\|\\\le\int_0^t&\left(1-\frac{\|A\|\tau}{1+\|e^{AT}\|}\|e^{A(t-s-\tau)}\|\right)\|e^{A(t-s-\tau)}\|\big[K_1\|x_1-x_0\|+K_2\|y_1-y_0\|+K_3\|z_1-z_0\|\big]d\tau+\\&+\int_t^T\frac{\|A\|\tau}{1+\|e^{AT}\|}\|e^{2A(t-s-\tau)}\|\big[K_1\|x_1-x_0\|+K_2\|y_1-y_0\|+K_3\|z_1-z_0\|\big]d\tau\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^t \left(1-\frac{\|A\|\tau}{1+Q_1}Q_1\right)Q_1\left[K_1\|x_1-x_0\|+K_2\|y_1-y_0\|+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\left(N_1\|x_1-x_0\|+N_2\|y_1-y_0\|\right)\right]d\tau+$$

$$+\int_t^T \frac{\|A\|\tau}{1+Q_1}Q_1^2\left[K_1\|x_1-x_0\|+K_2\|y_1-y_0\|+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\left(N_1\|x_1-x_0\|+N_2\|y_1-y_0\|\right)\right]d\tau$$

$$\leq \left(tQ_1-\frac{\|A\|(T^2-2t^2)}{2(1+Q_1)}Q_1^2\right)\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_1-x_0\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_1-y_0\|\right]$$

$$=\alpha_1(t)\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_1-x_0\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_1-y_0\|\right]$$

$$\leq \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_1-x_0\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_1-y_0\|\right]$$

وبواسطة المأخوذة (2) ومن المتتابعة (12) عندما m=1 نجد ان:

$$\|y_2(t,x_0,y_0)-y_1(t,x_0,y_0)\|\leq \int_0^t \left(1-\frac{\|B\|\tau}{1+Q_2}Q_2\right)Q_2\left[L_1\|x_1-x_0\|+L_2\|y_1-y_0\|+L_3\|z_1-z_0\|\right]d\tau+$$

$$+\int_t^T \frac{\|B\|\tau}{1+Q_2}Q_2^2\left[L_1\|x_1-x_0\|+L_2\|y_1-y_0\|+L_3\|z_1-z_0\|\right]d\tau$$

$$\leq \left(tQ_2-\frac{\|B\|(T^2-2t^2)}{2(1+Q_2)}Q_2^2\right)\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_1-x_0\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_1-y_0\|\right]$$

$$=\alpha_2(t)\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_1-x_0\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_1-y_0\|\right]$$

$$\leq \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_1-x_0\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_1-y_0\|\right]$$

كذلك

$$\|z_2(\tau,x_0,y_0)-z_1(\tau,x_0,y_0)\|\leq \frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\left[N_1\|x_2-x_1\|+N_2\|y_2-y_1\|\right]$$

بواسطة المأخوذة (1) ومن المتتابعة (11) عندما m=2 نحصل على:

$$\|x_3(t,x_0,y_0)-x_2(t,x_0,y_0)\|\leq \int_0^t \left(1-\frac{\|A\|\tau}{1+Q_1}Q_1\right)Q_1\left[K_1\|x_2-x_1\|+K_2\|y_2-y_1\|+K_3\|z_2-z_1\|\right]d\tau+$$

$$+\int_t^T \frac{\|A\|\tau}{1+Q_1}Q_1^2\left[K_1\|x_2-x_1\|+K_2\|y_2-y_1\|+K_3\|z_2-z_1\|\right]d\tau$$

$$\leq \alpha_1(t)\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_2-x_1\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_2-y_1\|\right]$$

$$\leq \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_2-x_1\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_2-y_1\|\right]$$

وبواسطة المأخوذة (2) ومن المتتابعة (12) عندما m=2 ينتج لدينا:

$$\|y_3(t,x_0,y_0)-y_2(t,x_0,y_0)\| \leq \int_0^t\left(1-\frac{\|B\|\tau}{1+Q_2}Q_2\right)Q_2\left[L_1\|x_2-x_1\|+L_2\|y_2-y_1\|+L_3\|z_2-z_1\|\right]d\tau+$$

$$+\int_t^T\frac{\|B\|\tau}{1+Q_2}Q_2^2\left[L_1\|x_2-x_1\|+L_2\|y_2-y_1\|+L_3\|z_2-z_1\|\right]d\tau$$

$$\leq \alpha_2(t)\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_2-x_1\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_2-y_1\|\right]$$

$$\leq \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_2-x_1\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_2-y_1\|\right]$$

كذلك

$$\|z_3(\tau,x_0,y_0)-z_2(\tau,x_0,y_0)\| \leq \frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\left[N_1\|x_3-x_2\|+N_2\|y_3-y_2\|\right]$$

وبواسطة الاستقراء الرياضي ينتج لدينا

$$\|x_{m+1}(t,x_0,y_0)-x_m(t,x_0,y_0)\| \leq \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_m-x_{m-1}\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_m-y_{m-1}\|\right]$$

..... (22)

$$\|y_{m+1}(t,x_0,y_0)-y_m(t,x_0,y_0)\| \leq \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_m-x_{m-1}\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_m-y_{m-1}\|\right]$$

..... (23)

نعيد كتابة المتباينتين (22) و (23) بشكل متجهات وعلى النحو الآتي:

$$V_{m+1}(t,x_0,y_0) \leq \Lambda(t)\, V_m(t,x_0,y_0) \qquad \text{..... (24)}$$

إذ ان

$$V_{m+1}(t,x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\|x_{m+1}(t,x_0,y_0)-x_m(t,x_0,y_0)\| \\ \|y_{m+1}(t,x_0,y_0)-y_m(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix}$$

$$\Lambda(t)=\begin{pmatrix} \frac{\|A\|t^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|A\|t^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2) \\ \frac{\|B\|t^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|B\|t^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2) \end{pmatrix},$$

$$V_m(t,x_0,y_0)=\begin{pmatrix} \|x_m(t,x_0,y_0)-x_{m-1}(t,x_0,y_0)\| \\ \|y_m(t,x_0,y_0)-y_{m-1}(t,x_0,y_0)\| \end{pmatrix}$$

وهذا يؤدي من المتباينة (24) إلى ان

$$V_{m+1}(t)\le \Lambda_0\ V_m(t) \qquad \ldots\ldots (25)$$

إذ ان

$$\Lambda_0=\max_{t\in[0,T]}\Lambda(t)$$

بتكرار المتباينة (25) نحصل على

$$V_{m+1}(t)\le \Lambda_0^m\ V_m(t) \qquad \ldots\ldots (26)$$

إذ ان

$$V_0=\begin{pmatrix} \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 \\ \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 \end{pmatrix}$$

وهذه تقود إلى الحصول على التقدير الآتي:

$$\sum_{i=1}^{m}V_i\le\sum_{i=1}^{m}\Lambda_0^{i-1}\ V_0 \qquad \ldots\ldots (27)$$

وبما ان المصفوفة Λ_0 لها قيم ذاتية

$$\lambda_{\max}(\Lambda_0)=\frac{1}{2}\left[\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)+\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\right]\mp$$

$$\mp\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{(1+Q_1)}\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{(1+Q_2)}\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)-\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

فان هذا يؤدي إلى ان متتابعة الدوال (11) و (12) متقاربة بانتظام في المجال (13) بمعنـــى آخر

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\Lambda_0^{i-1}V_0=\sum_{i=1}^{\infty}\Lambda_0^{i-1}V_0=(E-\Lambda_0)^{-1}V_0 \qquad \ldots\ldots (28)$$

إذ ان E مصفوفة الوحدة.

وبالتالي العلاقة (28) تؤكد تقارب متتابعات الـــدوال $x_m(t,x_0,y_0)$ و $y_m(t,x_0,y_0)$ في المجال (13).

نفرض ان

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}x_m(t,x_0)=x_\infty(t,x_0)\\&\lim_{m\to\infty}y_m(t,x_0)=y_\infty(t,x_0)\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (29)$$

بما أن متتابعة كل من الدالتين $x_m(t,x_0,y_0)$ ، $y_m(t,x_0,y_0)$ دورية فـــي t ذات دور يساوي T فإن نهاية كل منهما دورية في t ذات دور يساوي T ومن ثم فإن

$$x_\infty(t,x_0,y_0)=x(t,x_0,y_0) \qquad , \qquad y_\infty(t,x_0,y_0)=y(t,x_0,y_0)$$

فضلا عن ذلك باستخدام العلاقة (29) فإن المتباينة الآتية:

$$\begin{pmatrix}\left\|x_\infty(t,x_0,y_0)-x_m(t,x_0,y_0)\right\|\\\left\|y_\infty(t,x_0,y_0)-y_m(t,x_0,y_0)\right\|\end{pmatrix}\le\Lambda_0^m(E-\Lambda_0)^{-1}V_0 \qquad \ldots\ldots (30)$$

تتحقق لأجل $m\ge 1$ وهكذا فـــان كـــل مـــن الـــدالتين $x_\infty(t,x_0,y_0)=x(t,x_0,y_0)$ ، $y_\infty(t,x_0,y_0)=y(t,x_0,y_0)$ هي حل للنظام (1).

البند الثاني: وحدانية الحل

مبرهنة 2 :

لتكن جميع فرضيات وشروط المبرهنة 1 متحققـــة عندئـــذ كـــل مـــــن الـــدالتين $x(t,x_0,y_0)$ ، $y(t,x_0,y_0)$ هو حل وحيد للنظام (1) في المجال (2).

البرهان: نفرض ان

$$\begin{aligned}\hat{x}(t,x_0,y_0)=x_0+\int_0^t e^{A(t-s-\tau)}\big[f\big(\tau,\hat{x}(\tau,x_0,y_0),\hat{y}(\tau,x_0,y_0),\hat{z}(\tau,x_0,y_0)\big)-\\-\int_0^T\frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)}f\big(\tau,\hat{x}(\tau,x_0,y_0),\hat{y}(\tau,x_0,y_0),\hat{z}(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\big]d\tau\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots (31)$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t,x_0,y_0)=y_0+\int_0^t e^{B(t-s-\tau)}\big[g\big(\tau,\hat{x}(\tau,x_0,y_0),\hat{y}(\tau,x_0,y_0),\hat{z}(\tau,x_0,y_0)\big)-\\-\int_0^T\frac{B}{E+e^{BT}}e^{B(T-s-\tau)}g\big(\tau,\hat{x}(\tau,x_0,y_0),\hat{y}(\tau,x_0,y_0),\hat{z}(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\big]d\tau\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots (32)$$

حـــلان آخـــران للنظـــام (1) ، ثـــم نحـــاول إثبـــات ان $x(t,x_0,y_0)=\hat{x}(t,x_0,y_0)$ و $y(t,x_0,y_0)=\hat{y}(t,x_0,y_0)$ ، ولإثبات ذلك نحتاج إلى إثبات صحة المتباينة الآتية:

$$\begin{pmatrix}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_m(t,x_0,y_0)\|\\ \|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_m(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix}\le\Lambda_0\begin{pmatrix}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_{m-1}(t,x_0,y_0)\|\\ \|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_{m-1}(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix}\quad\ldots\ldots(33)$$

حيث $M_1^*=\max_{t\in[0,T]}\|f(t,x,y,z)\|$ ، $M_2^*=\max_{t\in[0,T]}\|g(t,x,y,z)\|$.

سوف نثبت المتباينة أعلاه باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي.

عندما m=0 نحصل على

$$\begin{aligned}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_0\|&=\Big\|x_0+\int_0^t e^{A(t-s-\tau)}\big[f\big(\tau,\hat{x}(\tau,x_0,y_0),\hat{y}(\tau,x_0,y_0),\hat{z}(\tau,x_0,y_0)\big)-\\&\quad-\int_0^T\frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)}f\big(\tau,\hat{x}(\tau,x_0,y_0),\hat{y}(\tau,x_0,y_0),\hat{z}(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\big]d\tau-x_0\Big\|\\&\le\alpha_1(t)M_1^*\le\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_0\|&=\Big\|y_0+\int_0^t e^{B(t-s-\tau)}\big[g\big(\tau,\hat{x}(\tau,x_0,y_0),\hat{y}(\tau,x_0,y_0),\hat{z}(\tau,x_0,y_0)\big)-\\&\quad-\int_0^T\frac{B}{E+e^{BT}}e^{B(T-s-\tau)}g\big(\tau,\hat{x}(\tau,x_0,y_0),\hat{y}(\tau,x_0,y_0),\hat{z}(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\big]d\tau-y_0\Big\|\\&\le\alpha_2(t)M_2^*\le\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\hat{z}(\tau,x_0,y_0)-z_0(\tau)\|&=\Big\|\int_{-\infty}^t u(t,s,\tau)h(\tau,\hat{x},\hat{y})d\tau-\int_{-\infty}^t u(t,s,\tau)h(\tau,x_0,y_0)d\tau\Big\|\\&\le\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\big[N_1\|\hat{x}-x_0\|+N_2\|\hat{y}-y_0\|\big]\end{aligned}$$

عندما m=1 نحصل على

$$\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_1(t,x_0,y_0)\|\le\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|\hat{x}-x_0\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|\hat{y}-y_0\|\right]$$

$$\|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_1(t,x_0,y_0)\|\le\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|\hat{x}-x_0\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|\hat{y}-y_0\|\right]$$

$$\|\hat{z}(\tau,x_0,y_0)-z_1(\tau,x_0,y_0)\|\le\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\big[N_1\|\hat{x}-x_1\|+N_2\|\hat{y}-y_1\|\big]$$

عندما m=2 نحصل على

$$\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_2(t,x_0,y_0)\| \le \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|\hat{x}-x_1\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|\hat{y}-y_1\|\right]$$

$$\|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_2(t,x_0,y_0)\| \le \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|\hat{x}-x_1\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|\hat{y}-y_1\|\right]$$

$$\|\hat{z}(\tau,x_0,y_0)-z_2(\tau,x_0,y_0)\| \le \frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\left[N_1\|\hat{x}-x_2\|+N_2\|\hat{y}-y_2\|\right]$$

إذن المتباينة صحيحة عندما m=0,1,2. .

نفرض صحة المتباينة عندما m=p-1 ، إذن

$$\begin{pmatrix}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_{p-1}(t,x_0,y_0)\|\\ \|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_{p-1}(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix} \le \Lambda_0\begin{pmatrix}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_{p-2}(t,x_0,y_0)\|\\ \|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_{p-2}(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix} \quad \ldots\ldots (34)$$

إذن سوف نثبت صحة المتباينة عندما m=p.

$$\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_p(t,x_0,y_0)\| \le \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|\hat{x}-x_{p-1}\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|\hat{y}-y_{p-1}\|\right]$$

$$\|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_p(t,x_0,y_0)\| \le \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|\hat{x}-x_{p-1}\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|\hat{y}-y_{p-1}\|\right]$$

فنحصل على

$$\begin{pmatrix}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_p(t,x_0,y_0)\|\\ \|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_p(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix}\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2)\\ \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|\hat{x}-x_{p-1}\|\\ \|\hat{y}-y_{p-1}\|\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_p(t,x_0,y_0)\|\\ \|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_p(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix} \le \Lambda_0\begin{pmatrix}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_{p-1}(t,x_0,y_0)\|\\ \|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_{p-1}(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix}$$

إذن المتباينة (33) صحيحة لكل m=0,1,2,... .

وبتكرار المتباينة (33) نحصل على

$$\begin{pmatrix}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_m(t,x_0,y_0)\|\\ \|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_m(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix} \le \Lambda_0^m\begin{pmatrix}\|\hat{x}(t,x_0,y_0)-x_{m-1}(t,x_0,y_0)\|\\ \|\hat{y}(t,x_0,y_0)-y_{m-1}(t,x_0,y_0)\|\end{pmatrix}$$

ولكن من الشرط (10) نحصل على $\Lambda_0^m \to 0$ عندما $m \to \infty$ وبالتالي يتكون لـــدينا مـــن المتباينة الأخيرة ان $x(t,x_0,y_0)=\hat{x}(t,x_0,y_0)$ و $y(t,x_0,y_0)=\hat{y}(t,x_0,y_0)$ بمعنى آخر ان الحلين $x(t,x_0,y_0)$ و $y(t,x_0,y_0)$ هما وحيدان للنظام (1).

البند الثالث: وجود الحل الدوري للنظام (1)

إن مسألة وجود الحل الدوري للنظام (1) مرتبطة بشكل وحيد مع وجود صفرية كل من الدالتين $\Delta(0,x_0,y_0)$ ، $\Delta^*(0,x_0,y_0)$ وهما من الشكل أدناه:

$$\Delta(0,x_0,y_0)=\int_0^T \frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)} f\big(\tau,x_\infty(\tau,x_0,y_0),y_\infty(\tau,x_0,y_0),z_\infty(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau$$

..... (35)

$$\Delta^*(0,x_0,y_0)=\int_0^T \frac{B}{E+e^{BT}}e^{B(T-s-\tau)} g\big(\tau,x_\infty(\tau,x_0,y_0),y_\infty(\tau,x_0,y_0),z_\infty(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau$$

..... (36)

حيث أن $x_\infty(t,x_0,y_0)$ ، $y_\infty(t,x_0,y_0)$ نهايتي المتتابعتين (11) و (12) على التوالي وهذه الدوال لا يمكن إيجادها إلا بطريقة التقريبات المتتالية ولاسيما من متتابعتي الدالتين التاليتين:

$$\Delta_m(0,x_0,y_0)=\int_0^T \frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)} f\big(\tau,x_m(\tau,x_0,y_0),y_m(\tau,x_0,y_0),z_m(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau$$

..... (37)

$$\Delta_m^*(0,x_0,y_0)=\int_0^T \frac{B}{E+e^{BT}}e^{B(T-s-\tau)} g\big(\tau,x_m(\tau,x_0,y_0),y_m(\tau,x_0,y_0),z_m(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau$$

..... (38)

حيث m=0,1,2,... .

مبرهنة 3 :

إذا كانت فرضيات وشروط المبرهنة 1 معطاة فإن المتباينة الآتية:

$$\begin{pmatrix} \|\Delta(t,x_0,y_0)-\Delta_m(t,x_0,y_0)\| \\ \|\Delta^*(t,x_0,y_0)-\Delta_m^*(t,x_0,y_0)\| \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2) \\ \frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2) \end{pmatrix} \Lambda_0^m(E-\Lambda_0)^{-1}V_0$$

..... (39)

تتحقق لكل $m\ge 0$ ، $t\in[0,T]$ ، $x_0\in D_f$ ، $y_0\in D_{1f}$.

البرهان:

بواسطة المعادلات (35) ، (36) يكون لدينا

$$\left\|\Delta(0,x_0,y_0)-\Delta_m(0,x_0,y_0)\right\|=\left\|\int_0^T\frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)}f\big(\tau,x_\infty(\tau,x_0,y_0),y_\infty(\tau,x_0,y_0),z_\infty(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^T\frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)}f\big(\tau,x_m(\tau,x_0,y_0),y_m(\tau,x_0,y_0),z_m(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\right\|$$

$$\le\int_0^T\frac{\|A\|}{1+Q_1}Q_1\left[K_1\|x_\infty-x_m\|+K_2\|y_\infty-y_m\|+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\big(N_1\|x_\infty-x_m\|+N_2\|y_\infty-y_m\|\big)\right]d\tau$$

إذن

$$\left\|\Delta(0,x_0,y_0)-\Delta_m(0,x_0,y_0)\right\|\le\frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_\infty-x_m\|+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_\infty-y_m\|\right]$$

..... (40)

وبالطريقة نفسها وبواسطة (36) و (38) نجد ان:

$$\left\|\Delta^*(0,x_0,y_0)-\Delta_m^*(0,x_0,y_0)\right\|=\left\|\int_0^T\frac{B}{E+e^{BT}}e^{B(T-s-\tau)}g\big(\tau,x_\infty(\tau,x_0,y_0),y_\infty(\tau,x_0,y_0),z_\infty(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^T\frac{B}{E+e^{BT}}e^{B(T-s-\tau)}g\big(\tau,x_m(\tau,x_0,y_0),y_m(\tau,x_0,y_0),z_m(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau\right\|$$

$$\le\int_0^T\frac{\|B\|}{1+Q_2}Q_2\left[L_1\|x_\infty-x_m\|+L_2\|y_\infty-y_m\|+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}\big(N_1\|x_\infty-x_m\|+N_2\|y_\infty-y_m\|\big)\right]d\tau$$

إذن

$$\left\|\Delta^*(0,x_0,y_0)-\Delta_m^*(0,x_0,y_0)\right\|\le\frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\|x_\infty-x_m\|+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\|y_\infty-y_m\|\right]$$

..... (41)

نعيد كتابة (40) ، (41) بشكل متجهات نجد ان

$$\begin{pmatrix}\left\|\Delta(t,x_0,y_0)-\Delta_m(t,x_0,y_0)\right\|\\ \\ \left\|\Delta^*(t,x_0,y_0)-\Delta_m^*(t,x_0,y_0)\right\|\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}\frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2)\\ \frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1) & \frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|x_\infty-x_m\|\\ \\ \|y_\infty-y_m\|\end{pmatrix}$$

وباستخدام العلاقة (30) نحصل على (39) .

مبرهنة 4 :

لتكن كل من الدالة $f(t,x,y,z)$ ، $g(t,x,y,z)$ في النظام (1) معرفة على الفترتين $[a,b]$ ، $[c,d]$ على التوالي ودورية في t ذات دور يساوي T .

نفرض ان متتابعة الدوال (37) تحقق المتباينتين الآتيتين:

$$\left.\begin{array}{ll} \min\limits_{a+\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1\le x_0\le b-\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1} & \Delta_m(0,x_0,y_0)\le -\delta \\ \max\limits_{a+\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1\le x_0\le b-\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1} & \Delta_m(0,x_0,y_0)\ge \delta_m \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (42)$$

ونفرض ان متتابعة الدوال (38) تحقق المتباينتين الآتيتين:

$$\left.\begin{array}{ll} \min\limits_{c+\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2\le y_0\le d-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2} & \Delta_m^*(0,x_0,y_0)\le -\varepsilon \\ \max\limits_{c+\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2\le y_0\le d-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2} & \Delta_m^*(0,x_0,y_0)\ge \varepsilon_m \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (43)$$

لكل $m\ge 0$ إذ ان

$$\delta_m=\left[\frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)+\frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\right]\Lambda^m(E-\Lambda)^{-1}\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1$$

$$\varepsilon_m=\left[\frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)+\frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\right]\Lambda^m(E-\Lambda)^{-1}\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2$$

عندئذ يكون للنظام (1) حل دوري $x=x(t,x_0,y_0)$ و $y=y(t,x_0,y_0)$ لأجل

$$a+\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1\le x(0)\le b-\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1 \quad , \quad c+\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2\le y(0)\le d-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2$$

البرهان:

لتكن x_1 ، x_2 أية نقطتين في الفتـــرة $\left[a+\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1, b-\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1\right]$

نفرض أن

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_m(0,x_1,y_1)=\min\limits_{a+\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1\le x_0\le b-\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1}\Delta_m(0,x_0,y_0) \\ \Delta_m(0,x_2,y_2)=\max\limits_{a+\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1\le x_0\le b-\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1}\Delta_m(0,x_0,y_0) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (44)$$

لتكن y_1 ، y_2 أية نقطتين في الفتـــرة $\left[c+\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2, d-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2\right]$

وأن

$$\left.\begin{aligned}\Delta_m^*(0,x_1,y_1) &= \min_{c+\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 \le y_0 \le d-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2} \Delta_m^*(0,x_0,y_0)\\ \Delta_m^*(0,x_2,y_2) &= \max_{c+\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2 \le y_0 \le d-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2} \Delta_m^*(0,x_0,y_0)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (45)$$

باستخدام المتباينات (39) ، (42) ، (43) نحصل على

$$\left.\begin{aligned}\Delta(0,x_1,y_1) &= \Delta_m(0,x_1,y_1)+\left[\Delta(0,x_1,y_1)-\Delta_m(0,x_1,y_1)\right]<0\\ \Delta(0,x_2,y_2) &= \Delta_m(0,x_2,y_2)+\left[\Delta(0,x_2,y_2)-\Delta_m(0,x_2,y_2)\right]>0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (46)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta^*(0,x_1,y_1) &= \Delta_m^*(0,x_1,y_1)+\left[\Delta^*(0,x_1,y_1)-\Delta_m^*(0,x_1,y_1)\right]<0\\ \Delta^*(0,x_2,y_2) &= \Delta_m^*(0,x_2,y_2)+\left[\Delta^*(0,x_2,y_2)-\Delta_m^*(0,x_2,y_2)\right]>0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (47)$$

من استمرارية الدالتين المعرفتين في المعادلتين (35) و (36) والعلاقتين (46) و (47) فانه يوجد نقطتان منعزلتان منفردتان $x_\infty = x_0$ ، $x_\infty \in [x_1,x_2]$ و $y_\infty = y_0$ ، $y_\infty \in [y_1,y_2]$ بحيث ان $\Delta(0,x_\infty,y_\infty)\equiv 0$ ، $\Delta^*(0,x_\infty,y_\infty)\equiv 0$ وهذا يعني ان النظام (1) له حل دوري $x=x(t,x_0,y_0)$ لأجل $x_0 \in \left[a+\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1, b-\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}M_1\right]$ و $y=y(t,x_0,y_0)$ لأجل $y_0 \in \left[c+\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2, d-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}M_2\right]$.

ملاحظة 1 [5] :

تمت صياغة منطوق المبرهنة 4 مع البرهان عندما $R^n = R^1$ بمعنى آخر عندما تكون x_0 كمية غير متجهة.

مبرهنة 5 :

لتكن كل من الدالتين $\Delta(0,x_0,y_0)$ و $\Delta^*(0,x_0,y_0)$ معرفتان بالشكل أدناه على التوالي:

$$\Delta(0,x_0,y_0)=\int_0^T \frac{A}{E+e^{AT}} e^{A(T-s-\tau)} f\big(\tau, x_\infty(\tau,x_0,y_0), y_\infty(\tau,x_0,y_0), z_\infty(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau \quad \ldots\ldots (48)$$

$$\Delta^*(0,x_0,y_0)=\int_0^T \frac{B}{E+e^{BT}} e^{B(T-s-\tau)} g\big(\tau, x_\infty(\tau,x_0,y_0), y_\infty(\tau,x_0,y_0), z_\infty(\tau,x_0,y_0)\big)d\tau \quad \ldots\ldots (49)$$

إذ ان الدالتين $x_\infty(t,x_0,y_0)$ ، $y_\infty(t,x_0,y_0)$ هما نهايتا متتابعتي الدالتين (11) و (12) على التوالي، فإن المتباينات الآتية:

$$\|\Delta(0,x_0,y_0)\| \le M_3 \quad \ldots\ldots (50)$$

$$\left\|\Delta^*(0,x_0,y_0)\right\| \le M_4 \qquad \ldots\ldots (51)$$

$$\left\|\Delta\left(0,x_0^1,y_0^1\right)-\Delta\left(0,x_0^2,y_0^2\right)\right\| \le W_6\left\|x_0^1-x_0^2\right\|+W_7\left\|y_0^1-y_0^2\right\| \qquad \ldots\ldots (52)$$

$$\left\|\Delta^*\left(0,x_0^1,y_0^1\right)-\Delta^*\left(0,x_0^2,y_0^2\right)\right\| \le W_8\left\|x_0^1-x_0^2\right\|+W_9\left\|y_0^1-y_0^2\right\| \qquad \ldots\ldots (53)$$

تتحقق لكل $x_0, x_0^1, x_0^2 \in D$ و $y_0, y_0^1, y_0^2 \in D_1$.

حيث ان $M_3 = \frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}M_1$ ، $M_4 = \frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}M_2$ ، وان

$$W_1 = \left(1-\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\right)^{-1} \quad , \quad W_2 = \left(1-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\right)^{-1}$$

$$W_3 = \frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)W_1W_2 \quad , \quad W_4 = \left(1-\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\right)W_3$$

$$W_5 = \frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\frac{W_2}{1-W_4}$$

$$W_6 = \left[\frac{\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)}{1-W_4}+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)W_5\right]\frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}W_1$$

$$W_7 = \left[\frac{\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)}{1-W_4}+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)(1-W_5)\right]\frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}W_2$$

$$W_8 = \left[\frac{\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)}{1-W_4}+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)W_5\right]\frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}W_1$$

$$W_9 = \left[\frac{\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)}{1-W_4}+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)(1-W_5)\right]\frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}W_2$$

البرهان:

من صفات الدالتين $x_\infty(t,x_0,y_0)$ ، $y_\infty(t,x_0,y_0)$ المثبتة بواسطة المبرهنة 1 فان كل من الدالتين $\Delta=\Delta(0,x_0,y_0)$ ، $\Delta^*=\Delta^*(0,x_0,y_0)$ مستمرة ومقيدة بالثابت الموجب M_3 لكل $x_0\in D_f$ و M_4 لكل $y_0\in D_{1f}$ على التوالي.

من العلاقة (48) فان المتباينة الآتية تتحقق

$$\left\|\Delta(0,x_0^1,y_0^1)-\Delta(0,x_0^2,y_0^2)\right\|\le\frac{\|A\|TQ_1}{1+Q_1}\left[\left(K_1+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\left\|x_\infty(t,x_0^1,y_0^1)-x_\infty(t,x_0^2,y_0^2)\right\|+\right.$$
$$\left.+\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\left\|y_\infty(t,x_0^1,y_0^1)-y_\infty(t,x_0^2,y_0^2)\right\|\right]$$
..... (54)

وكذلك بالطريقة نفسها، وبواسطة (49) نحصل على:

$$\left\|\Delta^*(0,x_0^1,y_0^1)-\Delta^*(0,x_0^2,y_0^2)\right\|\le\frac{\|B\|TQ_2}{1+Q_2}\left[\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\left\|x_\infty(t,x_0^1,y_0^1)-x_\infty(t,x_0^2,y_0^2)\right\|+\right.$$
$$\left.+\left(L_2+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\left\|y_\infty(t,x_0^1,y_0^1)-y_\infty(t,x_0^2,y_0^2)\right\|\right]$$
..... (55)

بما ان

$$x(t,x_0^\ell,y_0^\ell)=x_0^\ell+\int_0^t e^{A(t-s-\tau)}\Big[f\big(\tau,x(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell),y(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell),z(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell)\big)-$$
$$-\int_0^T\frac{A}{E+e^{AT}}e^{A(T-s-\tau)}f\big(\tau,x(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell),y(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell),z(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell)\big)d\tau\Big]d\tau$$
..... (56)

$$y(t,x_0^\ell,y_0^\ell)=y_0^\ell+\int_0^t e^{B(t-s-\tau)}\Big[g\big(\tau,x(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell),y(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell),z(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell)\big)-$$
$$-\int_0^T\frac{B}{E+e^{BT}}e^{B(T-s-\tau)}g\big(\tau,x(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell),y(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell),z(\tau,x_0^\ell,y_0^\ell)\big)d\tau\Big]d\tau$$
..... (57)

حيث أن $\ell=1,2.$.

بما ان $x_\infty(t,x_0,y_0)$ تحقق المعادلة (14)، ومن المتباينة (56) نجد ان:

$$\left\|x(t,x_0^1,y_0^1)-x(t,x_0^2,x_0^2)\right\|\le W_1\left[\left\|x_0^1-x_0^2\right\|+\frac{\|A\|T^2Q_1^2}{2(1+Q_1)}\left(K_2+K_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_2\right)\left\|y(t,x_0^1,y_0^1)-y(t,x_0^2,y_0^2)\right\|\right]$$
..... (58)

بما ان $y_\infty(t,x_0,y_0)$ تحقق المعادلة (15)، ومن المتباينة (57) نجد ان:

$$\left\|y(t,x_0^1,y_0^1)-y(t,x_0^2,x_0^2)\right\| \le W_2\left[\left\|y_0^1-y_0^2\right\|+\frac{\|B\|T^2Q_2^2}{2(1+Q_2)}\left(L_1+L_3\frac{\delta}{\gamma}e^{\gamma T}N_1\right)\left\|x(t,x_0^1,y_0^1)-x(t,x_0^2,y_0^2)\right\|\right]$$

…… (59)

بتعويض العلاقة (59) في العلاقة (58) نحصل على

$$\left\|x(t,x_0^1,y_0^1)-x(t,x_0^2,y_0^2)\right\| \le \frac{W_1}{1-W_4}\left\|x_0^1-x_0^2\right\|+\frac{W_2}{1-W_4}\left\|y_0^1-y_0^2\right\| \qquad \text{…… (60)}$$

بتعويض العلاقة (60) في العلاقة (59) نحصل على

$$\left\|y(t,x_0^1,y_0^1)-y(t,x_0^2,y_0^2)\right\| \le W_1W_5\left\|x_0^1-x_0^2\right\|+(1-W_5)W_2\left\|y_0^1-y_0^2\right\| \qquad \text{…… (61)}$$

بتعويض العلاقتين (60) و (61) في العلاقة (54) نحصل على

$$\left\|\Delta(0,x_0^1,y_0^1)-\Delta(0,x_0^2,y_0^2)\right\| \le W_6\left\|x_0^1-x_0^2\right\|+W_7\left\|y_0^1-y_0^2\right\|$$

بتعويض العلاقتين (60) و (61) في العلاقة (55) نحصل على

$$\left\|\Delta^*(0,x_0^1,y_0^1)-\Delta^*(0,x_0^2,y_0^2)\right\| \le W_8\left\|x_0^1-x_0^2\right\|+W_9\left\|y_0^1-y_0^2\right\|$$

ملاحظة 2 [4] :

تؤكد المبرهنة 5 استقرارية الحل للنظام (1)، وذلك عندما يحدث تغيير طفيف في النقطة x_0 يقابله تغيير طفيف في سلوك الدالة $\Delta=\Delta(t,x_0)$.

REFERENCES

1- Butris, R. N. and Ghada, Sh. J. *The existence and approximation of periodic solution for systems of nonlinear integro-differential equations of voltarra type*, Iraq, Mosul, J. of Educ. And sci, Vol.18, No.2 (2006), 104-114.

2- Butris, R. N. and Ghada, Sh. J. *The existence and approximation of periodic solution for systems of nonlinear integro-differential equations of second order of voltarra type*, Iraq, Mosul, J. of Educ. And sci, Vol.18, No.1 (2006), 124-137.

3- Kolmokorov, A. N. and Fomin, G. B. *Introduction in the theory of functional and mathematical analysis*, USSR, Moscow, (1989).

4- Martynyuk, D. I. *Periodic solutions of second-order nonlinear differential equations*, Ukraine, Kiev, Math. J. No. 4, (1967), 125-132.

5- Perestyuk, N. A. *The Periodic solutions nonlinear systems of differential equations*, Ukraine, Kiev, Math. And Meca. J., No. 5, (1971), 136-146.

6- Samoilenko, A. M. and Ronto, N. I. *A numerical-analytic method for investigation of periodic solutions*, Ukraine, Kiev, (1976).