وجود وتقارب الحل الدوري لنظام من المعادلات التكاملية- التفاضلية اللاخطية من الرتبة الأولى ذات تأخر المتغير المستقل مع شروط حدودية

رعد نوري بطرس و آن صباح اسحق
كلية التربية / قسم الرياضيات ماجستير رياضيات

تاريخ الاستلام 2005/11/28
تاريخ القبول 2006/3/6

الملخص

يتضمن هذا البحث دراسة وجود الحل وتقاربه لنظام من المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية من الرتبة الأولى ذات تأخر المتغير المستقل مع شروط حدودية وذلك باستخدام الطريقة التحليلية – العددية لدراسة الحلول الدورية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية لـ Samoilenko .

ABSTRACT

In this paper we study the existence and approximation of the solutions for some systems of nonlinear integro-differential equations with having retarded arguments and boundary conditions. The numerical–analytic method has been used to study the periodic solutions of ordinary differential equations which were introduced by A. M. Samoilenko.

المقدمة

لقد كُرس عدد كبير من الدراسات للأنظمة الدورية المستقلة وغير المستقلة للمعادلات التكاملية والتفاضلية والتكاملية-التفاضلية الخطية واللاخطية وتناولت تلك الدراسات وعلى نحو شامل مسائل عامة بشأن نظرية الحلول الدورية والطرائق الحديثـة فـي دراسـتها النوعيـة للمعادلات التكاملية الدورية فضلاً عن مختلف الخوارزميات لبنائها التقريبي وعلى الرغم من ذلك فإن الاهتمام بنظرية الحلول الدورية للأنظمة اللاخطية كان ثابتاً، إذ يمكن أن يوضح من خلال التطبيقات العملية لهذه النظرية من ناحية ومن خلال التوجيه لتوسيع الأنظمة اللاخطيـة من ناحية أخرى.

لقد افترض Samoilenko [5] الطريقة التحليلية-العددية لدراسة الحلـول الدوريـة للمعادلات التفاضلية الاعتيادية وبنائها الخوارزمي وتضمنت تلك الطرائق، متتابعات منتظمـة للدوال الدورية إن ما نتج عن تلك الدراسة هو استخدام الحلول الدورية وعلـى نحـو واسـع النطاق في مختلف المعالجات الحديثة في الصناعة والتكنولوجيا وكما في الدراسات [3,4].

ندرس في هذا البحث نظام المعادلات التكامليـة-التفاضلية اللاخطية من الشكل في أدناه:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), x(t-\tau), \int_t^{t+T} g(s, x(s), x(s-\tau))ds\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$A_1 x(0) + B_1 x(T) = d_1 \quad . \quad \det B_1 \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

إذ إن $x \in D \subset R^n$ ، D مجال مغلق ومقيد الدالتين المتجهتين

$f(t,x,y,z)=(f_1 (t,x,y,z), f_2 (t,x,y,z)\ldots\ldots\ldots, f_n (t,x,y,z))$

$g(t,x,y) = (g_1 (t,x,y), g_2 (t,x,y)\ldots\ldots\ldots, g_n (t,x,y))$

والمعرفتين في المجال

$$(t,x,y,z) \in R^1 \times D\times D_1\times D_2=(-\infty,\infty) \times D\times D_1\times D_2 \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

ومستمرتين في t,x,y,z إذ إن D_1 ، D_2 مجالان محددان جزئيا من الفراغ الاقليدي R^m ، إذ إن $A_1 = (A_{1ij})$, $B_1 = (B_{1ij})$ مصفوفتان موجبتان من السعة (n×n) و $d_1 \in R^n$.

نفترض أن كلاً من الدالتين $f(t,x,y,z)$, $g(t,x,y)$ تحقق المتباينات الآتية:

$$\| f(t,x,y,z) \| \leq M, \quad \| g(t,x,y) \| \leq M_1 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\|f(t,x_1,y_1,z_1) - f(t,x_2,y_2,z_2)\| \leq K_1 \| x_1- x_2\| + K_2 \| y_1- y_2\| + K_3 \| z_1- z_2\| \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\|g(t,x_1,y_1) - g(t,x_2,y_2)\| \leq L_1 \| x_1- x_2\| + L_2 \| y_1- y_2\| \quad \ldots\ldots(6)$$

لكـــــل $\tau > 0$, $t \in R^1$, $x, x_1, x_2 \in D$, $y, y_1, y_2 \in D_1$, $z, z_1, z_2 \in D_2$

إذ أن M, M_1 ، K_1, K_2, K_3 و L_1, L_2 ثوابت موجبة.

تعريف 1 [5] :

يطلق على نظام المعادلات التكاملية-التفاضلية اللاخطية (1) مع الشروط الحدودية (2) إذ إن الطرف الأيمن معرف ومستمر ودوري في t ذات دور يساوي T في المجـال (3) بالنظام -T إذا كانت:

1- كل من D_{β} ، $D_{1\beta}$ مجموعات غير خالية أي إن

$$\left.\begin{aligned} D_{\beta} &= D - (M\frac{T}{2} + \beta_1) \\ D_{1\beta} &= D_1 - [T(L_1 + L_2)(M\frac{T}{2} + \beta_1) + M_1 T] \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

إذ إن $\beta_1 = \left\| B_1^{-1} d_1 - (A_1 B_1^{-1} + E)x_{\circ} \right\|$, $\|.\| = \max_t |.|$.

2- وفضلاً عن ذلك نفترض أن القيمـ ـة الآتيـ ـة $\boldsymbol{W}=[(K_1+ K_2) +K_3T(L_1+L_2)]\frac{T}{2}$ لا تتعدى الواحد، أي أن

$$W=[(K_1+ K_2) +K_3T(L_1+L_2)]\ \frac{T}{2} < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

تعريف 2 [5] :

إن قيمة الوسيط μ في النقطة $(t, x_{\circ})$ التي يكون عندها الحل للنظام

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-\tau), \int_t^{t+T} g(s, x(s), x(s-\tau))ds) - \mu \qquad \ldots\ldots\ldots(9)$$

دورياً في t ذات دور يساوي T يسمى بالثابت-Δ للنظام (1) خلال النقطـ ـة $(t, x_{\circ})$ إذا كان الوسيط وحيداً في تلك النقطة.

البند الأول: الحل التقريبي للنظام (1) مع الشروط الحدودية (2)

مأخوذة 1 :

إذا كانت f(t) دالة متجهة مستمرة في الفترة $0 \le t \le T$ فإن

$$\left\| \int_0^t (f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,ds)ds \right\| \le M\,\alpha(t)$$

إذ إن $\alpha(t) = 2t(1-\frac{t}{T})$, $M = \max_{t\in[0,T]} |f(t)|$.

البرهان:

$$\left\| \int_0^t (f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds)ds \right\| \le \left\| \int_0^t f(s)\,ds - \frac{t}{T}[\int_0^t f(s)\,ds + \int_t^T f(s)ds] \right\| \le$$

$$\le (1-\frac{t}{T})\int_0^t \|f(s)\|ds + \frac{t}{T}\int_t^T \|f(s)\|ds \le$$

$$\le (1-\frac{t}{T})\,t\,M + \frac{t}{T}(T-t)\,M \le$$

$$\le 2t\,(1-\frac{t}{T})M \le M\,\alpha(t)$$

نفترض أن المؤثر L معرف بالشكل الأتي:

$$Lf(t) = \int_0^t (f(s) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds)ds$$

من الواضح أن الدالة f(t) إذا كانت مستمرة على الفترة [0,T] فإن المؤثر Lf(t) مـستمر كذلك على الفترة نفسها.

مبرهنة 1 :

إذا كان النظام (1) مع الشروط الحدودية (2) يحقق المتباينـات (4) ، (5) و (6) والشرطين (7) ، (8) وله حل $x = x(t, x_\circ)$ ماراً بالنقطة $(t, x_\circ)$ فعندئذ تكون متتابعـة الدوال:-

$$x_m(t,x_\circ) = x_\circ + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,x_\circ), x_{m-1}(s-\tau,x_\circ), \int_s^{s+T} g(t, x_{m-1}(t,x_\circ), x_{m-1}(t-\tau,x_\circ))dt)ds + \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

مع m=1,2,……… ، $x_\circ(t, x_\circ) = x_\circ$

إذ إن

$$\alpha=\frac{1}{T}[B_1^{-1}d_1-(A_1B_1^{-1}+E)x_\circ-\int_0^T f(t,x_{m-1}(t,x_\circ),x_{m-1}(t-\tau,x_\circ),$$
$$,\int_s^{s+T} g(s,x_{m-1}(s,x_\circ),x_{m-1}(s-\tau,x_\circ))ds)dt]$$

متقاربة بانتظام عندما $m\to\infty$ في المجال

$(t,x_\circ)\in R^1\times D_\beta$ ....(11)

من الدالة $x^\circ(t,x_\circ)$ المعرفة والمستمرة في المجال (11) وتحقق نظام المعادلات التكاملية

$$x(t,x_\circ)=x_\circ+\int_0^t f(s,x(s,x_\circ),x(s-\tau,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ),x(t-\tau,x_\circ))dt)ds+\alpha\, t$$

.... (12)

الذي هو حل وحيد للنظام (1) ويحقق المتباينتين الآتيتين:

$$\left\|x^\circ(t,x_\circ)-x_\circ\right\|\le(M\alpha(t)+\beta_1)\le(\frac{MT}{2}+\beta_1) \quad\text{......... (13)}$$

$$\left\|x^\circ(t,x_\circ)-x_m(t,x_\circ)\right\|\le W^m(1-W)^{-1}\ (\frac{MT}{2}+\beta_1) \quad\text{......... (14)}$$

لكل $t\in R^1$ ، $x_0\in D_\beta$.

البرهان :-

نفتـرض أن متتابعـات الـدوال ...... , $x_1(t,x_\circ),x_2(t,x_\circ),\dots,x_m(t,x_\circ)$

المعرفة في العلاقة المتكررة (10) معرفة ومستمرة في المجال (3) .

إذاً بوساطة المأخوذة (1) ومن (10) عندما m=1 نجد أن

$$\left\|x_1(t,x_\circ)-x_\circ\right\|\le(M\alpha(t)+\beta_1)\le(M\frac{T}{2}+\beta_1) \quad\text{......... (15)}$$

نستنتج أن $x_1(t,x_\circ)\in D$ عندما $x_\circ\in D_\beta$ ، $t\in[0,T]$.

إذاً بواسطة الاستقراء الرياضي يمكن أن نؤكد صحة المتباينة الآتية لكل $m\ge 1$.

$$\left\|x_m(t,x_\circ)-x_\circ\right\|\le(M\alpha(t)+\beta_1)\le(M\frac{T}{2}+\beta_1) \quad\text{......... (16)}$$

وكذلك من دورية كل من المتتابعة $x_m(t,x_\circ)$ و $x_m(t-\tau,x_\circ)$ ومن (16) نجد المتباينة الآتية:

$$\left\|x_m(t-\tau,x_\circ)-x_\circ\right\|\le\left(M\alpha(t)+\beta_1\right)\le\left(M\frac{T}{2}+\beta_1\right)$$

هذا يعني أن $x_m(t,x_\circ)\in D$, $x_m(t-\tau,x_\circ)\in D_1$ لكل $x_\circ\in D_\beta$ بناء على ذلك نجد أن:

$$\|z_1(t,x_\circ)\|\le\|z_1(t,x_\circ)-z_0(t,x_\circ)\|+\|z_0(t,x_\circ)\|\le\left[T(L_1+L_2)\left(M\frac{T}{2}+\beta_1\right)+M_1T\right]$$

$$\le\left[T(L_1+L_2)\left(M\frac{T}{2}+\beta_1\right)+M_1T\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(17)$$

وهذا يعني $z_1(t,x_\circ)\in D_2$ لكل $x_\circ\in D_\beta$ و $z_\circ(t,x_\circ)\in D_{1\beta}$.

ومن الممكن بإستخدام الاستقراء الرياضي أثبات صحة المتباينة الآتية:

$$\|z_m(t,x_\circ)-z_\circ(t,x_\circ)\|\le\left[T(L_1+L_2)\left(M\frac{T}{2}+\beta_1\right)+M_1T\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(18)$$

لكـل $m\ge 1$ ، $x_\circ\in D_\beta$ هـذا يعنـي أن $z_m(t,x_\circ)\in D_2$ لكـل $x_\circ\in D_\beta$ و $z_\circ(t,x_\circ)\in D_{1\beta}$ ، إذ إن

$$z_m(t,x_0)=\int_t^{t+T} g\big(s,x_m(s,x_0),x_m(s-\tau,x_0)\big)ds \qquad , \qquad m=0,1,2,\ldots$$

نبرهن الآن أن متتابعة الدوال $\{x_m(t,x_\circ)\}_{m=0}^{\infty}$ متقاربة بانتظام في المجال (11) ومن ثمة فإن نهاية هذه المتتابعة دالة دورية ومستمرة في المجال نفسه من اجل ذلك نلاحظ أن تقـارب المتتابعة (10) كاف لتقارب السلسلة

$$x_\circ+[x_1(t,x_\circ)-x_\circ]+[x_2(t,x_\circ)-x_1(t,x_\circ)]+\ldots\ldots+$$
$$+[x_m(t,x_\circ)-x_{m-1}(t,x_\circ)]+\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots(19)$$

وذلك لان متتابعة المجاميع الجزئية للسلسلة (19) هي المتتابعة $x_m(t,x_\circ)$ كما أن

$$\|x_2(t,x_\circ)-x_1(t,x_\circ)\|\le W(M\frac{T}{2}+\beta_1) \qquad \ldots\ldots\ldots(20)$$

إذ إن $W=\frac{T}{2}\left[(K_1+K_2)+K_3T(L_1+L_2)\right]$ وبالمثل نجد أن

$$\|x_3(t,x_\circ)-x_2(t,x_\circ)\|\le W^2\left(M\frac{T}{2}+\beta_1\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(21)$$

الآن نبرهن على صحة المتباينة الآتية

$$\|x_{m+1}(t,x_\circ)-x_m(t,x_\circ)\|\le W^m\left(M\frac{T}{2}+\beta_1\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(22)$$

لأجل m=0,1,2,.........

$$\|x_{m+1}(t,x_\circ)-x_m(t,x_\circ)\| \le \Big\| \int_0^t f(s,x_m(s,x_\circ),x_m(s-\tau,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x_m(t,x_\circ),x_m(t-\tau,x_\circ))dt)ds-$$
$$-\frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_m(s,x_\circ),x_m(s-\tau,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x_m(t,x_\circ),x_m(t-\tau,x_\circ))dt)ds-$$
$$-\int_0^t f(s,x_{m-1}(s,x_\circ),x_{m-1}(s-\tau,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x_{m-1}(t,x_\circ),x_{m-1}(t-\tau,x_\circ))dt)ds+$$
$$+\frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1}(s,x_\circ),x_{m-1}(s-\tau,x_\circ),\int_s^{s+T} g(t,x_{m-1}(t,x_\circ),x_{m-1}(t-\tau,x_\circ))dt)ds\Big\|$$

$$\|x_{m+1}(t,x_\circ)-x_m(t,x_\circ)\| \le W^m\left(M\frac{T}{2}+\beta_1\right) \qquad \text{.........(23)}$$

ثم ومن اجل m=1,2,3...... يكون لدينا

$$\|x_m(t,x_\circ)-x_{m-1}(t,x_\circ)\| \le W^{m-1}\left(M\frac{T}{2}+\beta_1\right) \qquad \text{.........(24)}$$

من المتباينة (23) ولأجل $(p \ge 1)$ نحصل على

$$\|x_{m+p}(t,x_\circ)-x_m(t,x_\circ)\| \le W^m(M\frac{T}{2}+\beta_1)\sum_{i=0}^{p-1}W^i \qquad \text{.........(25)}$$

من العلاقة (25) نجد أن

$$\|x_{m+1}(t,x_\circ)-x_m(t,x_\circ)\| \le W^m(1-W)^{-1}(M\frac{T}{2}+\beta_1) \qquad \text{.........(26)}$$

لكل $(p \ge 1)$ وبالاستفادة من العلاقة (26) والـشرط (8) تكـون متتابعـة الـدوال (10) متقاربة بانتظام في المجال (11) ، عندما $m \to \infty$ نضع

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_\circ) = x^\circ(t,x_\circ) \qquad \text{.........(27)}$$

بما أن متتابعة الدوال $x_m(t,x_\circ)$ مستمرة في المجال المذكور فـإن نهايـة متتابعـة الدوال $x_m(t,x_\circ)$ مستمرة في المجال نفسه ومن ثم $x^\circ(t,x_\circ)=x(t,x_\circ)$ فضلا عن ذلـك وباستخدام المأخوذة (1) والعلاقة (27) فإن المتباينتين (13) ، (14) محققتـان مـن أجـل $m\ge1$.

وأخيراً نبرهن على وحدانية الحل $x(t,x_\circ)$ الذي حصلنا عليـه للنظـام (1) .

لنفترض وجود حل آخر $\hat{x}(t,x_\circ)$ للنظام (1) يحقـق الـشروط الحدوديـة (2) أنفـسها، معرف ومستمر في المجال نفسه، في هذه الحالة يكون لدينا :-

$$\hat{x}(t,x_\circ) = x_\circ + \int_0^t f(s,\hat{x}(s,x_\circ),\hat{x}(s-\tau,x_\circ), \int_s^{s+T} g(t,\hat{x}(t,x_\circ),\hat{x}(t-\tau,x_\circ))dt)ds + \alpha t \quad \text{.........(28)}$$

الآن سوف نبرهن أن $\hat{x}(t,x_\circ) = x(t,x_\circ)$ لكل $x_\circ \in D_\beta$ ولأجل ذلك سوف نثبت صحة المتباينة الآتية بوساطة الاستقراء الرياضي

$$\left\|\hat{x}(t,x_\circ) - x_m(t,x_\circ)\right\| \le W^m (1-W)^{-1}(M^* \frac{T}{2} + \beta_1) \quad \text{.........(29)}$$

إذ أن

$$M^* = \max_{\hat{x}\in D_\beta} \left| f(t,\hat{x}(t,x_\circ),\hat{x}(t-\tau,x_\circ), \int_t^{t+T} g(s,\hat{x}(s,x_\circ),\hat{x}(s-\tau,x_\circ))ds) \right|$$

لنفترض صحة المتباينة (29) من اجل m=p أي أن:

$$\left\|\hat{x}(t,x_\circ) - x_p(t,x_\circ)\right\| \le W^p (1-W)^{-1}(M^* \frac{T}{2} + \beta_1) \quad \text{.........(30)}$$

ولنثبت صحة المتباينة الآتية

$$\left\|\hat{x}(t,x_\circ) - x_{p+1}(t,x_\circ)\right\| \le W^{p+1} (1-W)^{-1}(M^* \frac{T}{2} + \beta_1) \quad \text{.........(31)}$$

في الواقع لدينا

$$\begin{aligned}\left\|\hat{x}(t,x_\circ) - x_{p+1}(t,x_\circ)\right\| &\le (1-\frac{t}{T})\int_0^t [K_1\left\|\hat{x}(s,x_\circ)-x_p(s,x_\circ)\right\| + +K_2\left\|\hat{x}(s-\tau,x_\circ)-x_p(s-\tau,x_\circ)\right\| + \\ &+K_3\int_s^{s+T}(L_1\left\|\hat{x}(t,x_\circ)-x_p(t,x_\circ)\right\| + L_2\left\|\hat{x}(t-\tau,x_\circ)-x_p(t-\tau,x_\circ)\right\|)dt]ds + \\ &+\frac{t}{T}\int_t^T \Big[K_1\left\|\hat{x}(s,x_0)-x_p(s,x_0)\right\| + K_2\left\|\hat{x}(s-\tau,x_0)-x_p(s-\tau,x_0)\right\| \\ &+L_2\left\|\hat{x}(t-\tau,x_\circ)-x_p(t-\tau,x_\circ)\right\|)dt\Big]ds + K_3\int_s^{s+T}(L_1\left\|\hat{x}(t,x_\circ)-x_p(t,x_\circ)\right\| \\ &\le W^{p+1}(1-W)^{-1}(M^*\frac{T}{2} + \beta_1)\end{aligned}$$

ومن ثم من اجل m=0,1,2,...... نؤكد صحة المتباينة (29) إذن بوساطة الشرطين (8) و (27) نحصل على

$$\hat{x}(t,x_\circ) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,x_\circ) = x^\circ(t,x_\circ)$$

وهذا يبرهن على إن الحلين متطابقان في المجال (11) .

البند الثاني : وجود الحل للنظام (1) مع الشروط الحدودية (2)

إن مسالة وجود الحل للنظام (1) مرتبطة وعلى نحو وحيد بوجـود صـفرية الدالـة $\Delta(0,x_{\circ})$ ، التي هي من الشكل في أدناه.

$$\Delta(0,x_{\circ})=\frac{1}{T}\Big[(A_1B_1^{-1}+E)x_{\circ}-B_1^{-1}d_1+\int_0^T f(t,x(t,x_{\circ}),x(t-\tau,x_{\circ}),\int_t^{t+T} g(s,x(s,x_{\circ}),x(s-\tau,x_{\circ}))ds)dt\Big]$$

………(32)

إذ إن $x^{\circ}(t,x_{\circ})$ نهاية متتابعة الدوال (10) وهذه الدالة لا يمكن إثبات وجودهـا إلا بطريقة التقريب المتتالي وبخاصة من متتابعة الدوال الآتية:

$$\Delta_m(0,x_{\circ})=\frac{1}{T}\Big[(A_1B_1^{-1}+E)x_{\circ}-B_1^{-1}d_1+\int_0^T f(t,x_m(t,x_{\circ}),x_m(t-\tau,x_{\circ}),\int_t^{t+T} g(s,x_m(s,x_{\circ}),x_m(s-\tau,x_{\circ}))ds)dt\Big]$$

………(33)

إذ إن $m=0,1,2,....$.

مبرهنة 2 :

إذا كانت فرضيات المبرهنة **1** وشروطها معطاة فان المتباينة الآتية:-

$$\|\Delta(0,x_{\circ})-\Delta_m(0,x_{\circ})\|\le W^{m+1}(1-W)^{-1}\left(M+\frac{2\beta_1}{T}\right) \qquad ………(34)$$

تتحقق لأجل $m\ge 0$ و $x_{\circ}\in D_{\beta}$.

البرهان:

بوساطة (32) و (33) يكون لدينا

$$\|\Delta(0,x_{\circ})-\Delta_m(0,x_{\circ})\|\le\frac{1}{T}\int_0^T[K_1\|x^{\circ}(t,x_{\circ})-x_m(t,x_{\circ})\|+$$

$$+K_2\|x^{\circ}(t-\tau,x_{\circ})-x_m(t-\tau,x_{\circ})\|+$$

$$+K_3\int_t^{t+T}(L_1\left\|x^\circ(s,x_\circ)-x_m(s,x_\circ)\right\|+$$
$$+L_2\left\|x^\circ(s-\tau,x_\circ)-x_m(s-\tau,x_\circ)\right\|)ds]dt$$

.........(35)

بوساطة المتباينة (14) نجد أن

$$\left\|\Delta(0,x_\circ)-\Delta_m(0,x_\circ)\right\|\le W^{m+1}(1-W)^{-1}\left(M+\frac{2\beta_1}{T}\right)$$

لكل $x_\circ \in D_\beta$.

الآن نقدم المبرهنة الآتية اخذين بعين الاعتبار أن المتباينة (34) محققة لأجل $m \ge 0$.

مبرهنة 3 :

لتكن كل من $f(t,x,y,z)$ و $g(t,x,y)$ في النظام (1) معرفة علـى الفتـرة [a,b]، ونفترض إن متتابعة الدوال (33) تحقق المتباينين الآتيتين:

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{a+h\le x_\circ\le b-h}\Delta_m(0,x_\circ)\le-\sigma_m\\ \max\limits_{a+h\le x_\circ\le b-h}\Delta_m(0,x_\circ)\ge\sigma_m\end{array}\right\} \quad ....(36)$$

لكـل $m\ge0$ إذ إن $\sigma_m=\left\|W^{m+1}(1-W)^{-1}(M+\frac{2\beta_1}{T})\right\|$ ، $h=\frac{MT}{2}+\beta_1$ ، عندئـذ يوجد للنظام (1) حل $x=x(t,x_\circ)$ لأجل النقطة $x_\circ$ إذ إن $x_\circ\in[a+h,b-h]$

البرهان:

لتكن x_1,x_2 أية نقطتين في الفترة $[a+h,b-h]$ إذ إن

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_m(0,x_1)=\min\limits_{a+h\le x_\circ\le b-h}\Delta_m(0,x_\circ)\\ \Delta_m(0,x_2)=\max\limits_{a+h\le x_\circ\le b-h}\Delta_m(0,x_\circ)\end{array}\right\} \quad ....(37)$$

بوساطة (34) ، (36) يكون لدينا

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(0,x_1)=\Delta_m(0,x_1)+[\Delta(0,x_1)-\Delta_m(0,x_1)]\le 0\ ,\\ \Delta(0,x_2)=\Delta_m(0,x_2)+[\Delta(0,x_2)-\Delta_m(0,x_2)]\ge 0\end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots(38)$$

ومن ثم من استمرارية الدالة $\Delta(0,x_\circ)$ والمتباينتين (38) فإنه توجد نقطة منعزلة منفردة $x^\circ = x_\circ$ وإن $x^\circ \in [x_1,x_2]$ إذ إن $\Delta(0,x_\circ)=0$ وهذا يعني أن للنظام (1) حلاً $x=x(t,x_\circ)$ لأجل $x_\circ \in [a+h,b-h]$.

ملاحظة 1 :

صيغ منطوق المبرهنة 3 مع البرهان عندما $R^n = R^1$ أي عندما تكون $x_\circ$ كمية غير متجهة.

مبرهنة 4 :

لتكن

$$\Delta : D_\beta \to R^n$$

$$\Delta(0,x_\circ)=\frac{1}{T}\left[(A_1B_1^{-1}+E)x_\circ - B_1^{-1}d_1 + \int_0^T f(t,x(t,x_\circ),x(t-\tau,x_\circ),\right.$$
$$\left.\int_t^{t+T} g(s,x(s,x_\circ),x(s-\tau,x_\circ))ds)dt\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots(39)$$

إذ إن الدالة $x^\circ(t,x_\circ)$ ، نهاية متتابعة الدوال (10) وعندئذ تكون المتباينتان الآتيتان متحققتين:

$$\|\Delta(0,x_\circ)\| \le (M+\frac{\beta_1}{T}) \qquad \ldots\ldots\ldots(40)$$

$$\|\Delta(0,x_\circ^1)-\Delta(0,x_\circ^2)\| \le \left[\beta_2 + 2W(1-W)^{-1}\left(\frac{1}{T}+\beta_2\right)\right]\|x_\circ^1 - x_\circ^2\| \qquad \ldots\ldots\ldots(41)$$

لأجل النقاط $x_\circ, x_\circ^1, x_\circ^2 \in D_\beta$ إذ أن $\beta_2 = \frac{1}{T}\|E + A_1B_1^{-1}\|$.

البرهان:

من صفات الدالة $x^\circ(t,x_\circ)$ المثبتة بوساطة المبرهنة 1 تكون الدالة $\Delta=\Delta(0,x_\circ)$ مستمرة ومقيدة بالثابت الموجب $[M+\frac{\beta_1}{T}]$ لكل $x_\circ \in D_\beta$. بوساطة (39) تتحقق المتباينة الآتية:

$$\left\|\Delta(0,x_\circ^1)-\Delta(0,x_\circ^2)\right\| \le \beta_2\left\|x_\circ^1-x_\circ^2\right\|+\frac{2W}{T}\left\|x^\circ(t,x_\circ^1)-x^\circ(t,x_\circ^2)\right\| \qquad \ldots\ldots\ldots(42)$$

إذ إن الدالتين $x^\circ(t,x_\circ^2), x^\circ(t,x_\circ^1)$ هما حل للمعادلة التكاملية الآتية:

$$x(t,x_\circ^k)=x_\circ^k+\int_0^t f\Big(s,x(s,x_\circ^k),x(s-\tau,x_\circ^k),\int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ^k),x(t-\tau,x_\circ^k))dt\Big)ds-$$
$$-\frac{t}{T}\int_0^T f\Big(s,x(s,x_\circ^k),x(s-\tau,x_\circ^k),\int_s^{s+T} g(t,x(t,x_\circ{}^k),x(t-\tau,x_\circ{}^k))dt\Big)ds+$$
$$+\frac{t}{T}\left[B_1^{-1}d_1-(A_1B_1^{-1}+E)x_\circ^k\right] \quad , \quad k=1,2. \qquad \ldots\ldots\ldots(43)$$

من (43) نجد أن

$$\left\|x^\circ(t,x_\circ^1)-x^\circ(t,x_\circ^2)\right\| \le \left\|x_0^1-x_0^2\right\|+\beta_2 T\left\|x_0^1-x_0^2\right\|+|(K_1+L_1K_3T)\frac{T}{2}\left\|x^\circ(s,x_0^1)-x^\circ(s,x_0^2)\right\|+$$
$$+(K_2+L_2K_3T)\frac{T}{2}\left\|x^\circ(s-\tau,x_0^1)-x^\circ(s-\tau,x_0^2)\right\|$$

من دورية $x^\circ(t,x_\circ)$ و $x^\circ(t-\tau,x_\circ)$ نجد أن

$$\left\|x^\circ(t,x_\circ^1)-x^\circ(t,x_\circ^2)\right\| \le [(1-W)^{-1}(1+\beta_2 T)]\left\|x_\circ^1-x_\circ^2\right\| \qquad \ldots\ldots\ldots(44)$$

بتعويض المتباينة (44) في (42) نحصل على (41).

ملاحظة 2 :

تؤكد المبرهنة 4 استقرارية الحل للنظام (1) فعندما يحـدث تغييـر طفيـف فـي النقطة $x_\circ$ يقابله تغيير طفيف في الدالة $\Delta=\Delta(0,x_\circ)$ ولأجل الملاحظة راجع [4] .

REFERENCES

1. Butris, R. N. "The existen of periodic Solutions for nonlinear systems of integro-differential equations", Iraq, Mosul, J. Educ. and Sci. Vol.(25), (1994), P.P.(156-167).

2. Butris, R. N. "Existence of a solutions for systems of second–order differential equations with Boundary conditions", Iraq, Mosal, J. Educ. and sci. vol.(18), (1994).

3. Krasoseiski, M. A. "Vector fields", Moscow, (1963).

4. Matthyij, M. M. and Robert, M. M. "Numerical Solutions of boundary value problems for ordinary differential equations", Prentice Hall, Englewood, Cliffs, New Jersey, (1988).

5. Samoilenko, A. M. "A numerical–analytic method for investigation of periodic systems of ordinary differential equations I II", Ukrain, Math. J., No.4,5 (1965, 1966), P.P.(82-93), (50-59).