Journal of Education and Science (ISSN 1812-125X), Vol: 29, No: 1, 2020 (192-205)

Approximate Bayesian Estimation for Parameters of Simple Linear Bivariate Truncated T Regression Model

Elham Abdulkreem Hussain[1*]; Haifa Abduljwaad Saied[2]

[1] Department of Technical Product plant, Technical Agriculture College-Mosul,Northern Technical University
[2] Department of Statistic and Informatics, College of Computer Sciences and Mathematics, Mosul University

Email: [1*] dr.elham@ntu.edu.iq, [2] haeifa965@gmail.com

(Received September 03, 2018; Accepted December 03, 2019; Available online March 01, 2020)

DOI: 10.33899/edusj.2020.164372,

Abstract:

In this paper, it is obtained to approximate estimation for parameters of the two-tailed truncated regression model by Lindely approach. The prior non- informative was used for the regression parameters matrix when the variance matrix is known and the two truncated points are also known. Under the quadratic loss function, the estimates approximations of the regression parameters matrix around zero up to third order moments are obtained.

Keywords: truncated regression, Lindely's method, t regression model

تقدير بيز التقريبي لمعلمات نموذج انحدار t الثنائي المبتور الخطي البسيط

الهام عبد الكريم حسين[1*] و هيفاء عبد الجواد سعيد[2]

[1*] قسم تقنيات الانتاج النباتي, الكلية التقنية الزراعية – الموصل, الجامعة التقنية الشمالية, الموصل, العراق
[2] قسم الاحصاء والمعلوماتية, كلية علوم الحاسبات والرياضيات, جامعة الموصل, الموصل, العراق

المستخلص

تم في هذا البحث الحصول على التقدير التقريبي لمعلمات نموذج انحدار t الثنائي المبتور من طرفين بطريقة لندلي ، وتم استخدام معلومات سابقة غير خبرية حول مصفوفة معلمات الانحدار عندما تكون مصفوفة التباين معلومة ونقطتي البتر ايضا" معلومة ، وتحت دالة الخسارة التربيعية فقد اعتمدت المقدرات التقريبية لعناصر مصفوفة معلمات الانحدار على العزوم حول الصفر لغاية المرتبة الثالثة .

الكلمات المفتاحية : الانحدار المبتور , طريقة لندلي , نموذج انحدار t .

---

1 – المقدمة

تناول الباحثون خلال السنين الماضية موضوع تحليل الانحدار المبتور متعدد المتغيرات لما لهذا الموضوع من اهمية لدراسة العديد من الظواهر الاقتصادية والاجتماعية والطبيعية وغيرها ، فقد قدم Frenandes and Steel [1] بحثاً تناول فيه تقدير معلمات نموذج الانحدار المبتور متعدد المتغيرات باستخدام الاسلوب الكلاسيكي واسلوب بيز مع افتراض ان الخطأ يتوزع توزيع t . قدم Yan [2] بحثاً تناول فيه تقدير المعلمة β لنموذج انحدار خطي حسب طريقة المربعات الصغرى، بينما قدّر Alathari and Al–sarraf [3] معلمة نموذج الانحدار الطبيعي المبتور باستخدام طريقة الامكان الاعظم ، وعرض Massuia et. al. [4] التحليل التشخيصي لنموذج الانحدار الخطي مع بتر متغير الاستجابة وان الخطأ فيه يتبع توزيع t ، و قدموا خلال البحث تقدير المعلمات بطريقة تعظيم التوقع Maximization Expected وذكروا ان بعض الباحثين لاحظوا ان ثبات درجة الحرية هي التي تجعل المعلمات المقدرة قوية . و قدّم Ho. et. al. [5] بعض النتائج عن متعدد المتغيرات لتوزيع t المبتور ، حيث كانت النتائج التي قدمها تتعلق بحساب الوسط والتباين عن طريق احتساب العزوم من الرتبة الاولى والثانية عندما يكون هناك بتر من الطرفين ، وقدم حالة خاصة ايضا" عنما يكون البتر من جهة اليمين مع اعطاء بعض الامثلة والتطبيقات .

ان لتوزيع t استخدامات كثيرة في التطبيقات العملية كما في تطبيقات النظرية الاحصائية . تزايد الاهتمام في الـ (30 – 20) سنة الماضية بتوزيع t المتعدد المتغيرات [6]، فبالإضافة الى النمذجة الاحصائية التقليدية فقد أُستخدم التوزيع في النمذجة باحصاء بيز من حيث التعرف على التوزيعات اللاحقة بعد التعرف على التوزيعات الاولية . كذلك أُستخدم توزيع t المتعدد المتغيرات في التنبؤ عن طرق بيز [7] .

في التطبيقات العملية ذكر Inmaculada et. al. [8] ان من الممكن استخدام التوزيعات المبتورة ذات الذيل السميك (ومنها توزيع t) في التطبيقات المالية والفيزيائية والهيدرولوكية (علم المياه) والهندسية وتطبيقات اخرى مثل الزلازل الكبيرة وحرائق مساحات الغابات. وذكر Kots [9] ان توزيع t المتعدد المتغيرات يستخدم ايضا" في التخطيط المهني وان العلماء بدأوا باستخدام التوزيع في بيئة التعليم وبالتحديد فيما يخص موضوع تمييز الكلام ، وأيضا أُستخدم التوزيع في التطبيق على البيانات الامنية العائدة .

2– هدف البحث :

الهدف من البحث هو استخدام تقريب لندلي لتقدير معلمات نموذج انحدار t الثنائي المبتور .

3– وصف نموذج انحدار t المبتور متعدد المتغيرات :

يوصف نموذج انحدار t المبتور متعدد المتغيرات [10] بالشكل التالي :

$$\underline{y}_i = \beta \underline{x}_i + \underline{u}_i \qquad (1)$$

حيث ان :

$\underline{y}_i$: متجه المشاهدة i لمتغيرات الاستجابة ذو سعة (2) ، ويمكن تمثيله كما يلي :

$$\underline{y}_i = (\, y_{1i} \quad y_{2i})'$$

$\underline{x}_i$: متجه للمشاهدة i للمتغيرات التوضيحية ويأخذ الشكل التالي :

$$\underline{x}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{i1} \end{pmatrix}$$

اما المصفوفة β فهي تمثل مصفوفة معلمات الانحدار ذات سعة 2*2 وتأخذ الشكل الاتي :

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{11} \\ \beta_{02} & \beta_{12} \end{bmatrix}$$

$\underline{u}_i$: متجه الخطأ العشوائي للمشاهدة i ذو سعة (k) ويكون كالشكل التالي :

$$\underline{u}_i = (\underline{u}_{1i} \;\; \underline{u}_{2i})'$$

فاذا كان متجه مشاهدات متغير الاستجابة yi مبتورا" من طرفين ضمن الفترة ($\underline{a}$, $\underline{b}$) حيث ان :

$$\underline{a} = (a_1 \;\; a_2\,)'$$

$$\underline{b} = (b_1 \;\; b_2\,)'$$

وكان yi يتبع توزيع t متعدد المتغيرات المبتور من طرفين ضمن الفترة ($\underline{a}$,$\underline{b}$) والذي يوصف بالشكل التالي :

$$y_i|\beta, \Sigma \sim t_{2T_{(\underline{a},\underline{b})}}(\beta x_i, \Sigma, v)$$

وباستخدام النظرية التي ذكرها [11] Kelly التي تنص على ان الدالة الخطية في متغير طبيعي مبتور مضافا" اليه ثابت يتبع التوزيع الطبيعي المبتور وباستخدام التوزيعات المختلطة فأن :

$$y_i|\beta, \Sigma, \mathrm{T} \sim N_{T_{(\underline{a},\underline{b})}}(\beta x_i, \tau\Sigma)$$

و بما ان :

$$u_i = y_i - \beta x_i \qquad (2)$$

$$u_i|\Sigma \sim N_{T_{(\underline{a},\underline{b})}}(o, \tau\Sigma)$$

حيث ان :

$$a_1 = a - \beta x_i$$

$$b_1 = b - \beta x_i$$

وبالاستناد الى التوزيعات المختلطة فانه يمكن التعبير عن دالة كثافة احتمال yi المشروط بـ (β, Σ) بالشكل التالي :

$$f(y_i|\beta, \Sigma) = \frac{\int_0^\infty f(y_i|\beta, \Sigma, \tau) f(\tau) d\tau}{F(\underline{b}) - F(\underline{a})} = \frac{\int_0^\infty f(y_i|\beta, \Sigma, \tau) f(\tau) d\tau}{\int_0^\infty \int_a^b f(y_i|\beta, \Sigma, \tau) f(\tau) dy_i d\tau} \qquad (3)$$

ان دالة الامكان المشروطة بـ τ هي :

$$L(\beta|\tau) = \left[\frac{1}{F^*(b|\tau) - F^*(a|\tau)}\right]^n \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2\tau}\Sigma(y_i - \beta x_i)'\Sigma^{-1}(y_i - \beta x_i)}}{(2\pi\tau)^{n/2}\,|\Sigma|^{n/2}} \qquad (4)$$

$$F^*(b|\tau) - F^*(a|\tau) = \int_{\underline{a}}^{\underline{b}} \frac{e^{-\frac{1}{2\tau}(y_i - \beta x_i)'\Sigma^{-1}(y_i - \beta x_i)}}{2\pi\tau\ |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\ dy_i \qquad (5)$$

وبافتراض توفير معلومات اولية غير خبرية حول مصفوفة معلمات الانحدار β المشروطة بـ τ هي [12] :

$$p(\beta, \Sigma|\tau) \propto\ constant\ c = (\Sigma)^{-\frac{p+1}{2}} \qquad (6)$$

وبعد دمج معلومات العينة مع المعلومات المسبقة حول مصفوفة معلمات الانحدار β و باستخدام نظرية بيز يكون التوزيع اللاحق لـ β المشروط بـ τ :

$$p(\beta|\tau, data) = \frac{L(\beta|\tau)\ p(\beta|\tau)}{\int_\beta\ L(\beta|\tau)\ p(\beta|\tau)d\underline{\beta}} \qquad (7)$$

4 – مقدر بيز التقريبي لمصفوفة معلمات الانحدار β :

تحت دالة الخسارة التربيعية [13] يكون مقدر بيز لمصفوفة المعلمات $\underline{\beta}|\tau$ هو التوقع الرياضي للتوزيع البعدي لمصفوفة المعلمات β المشروط بـ τ الذي سبق تعريفه في المعادلة (3) اعلاه اي ان :

$$\hat{\beta}_B|\tau = \frac{\int\ \ \beta L(\beta|\tau, data)\ p(\beta|\tau)d\beta}{\int\ \ L(\beta|\tau, data)\ p(\beta|\tau)d\beta} \qquad (8)$$

من الصعب جدا ايجاد قيمة التكامل اعلاه تحليليا" لذلك لجئنا الى تقريب لندلي لايجاد مقدر بيز التقريبي [14] وكالاتي :

$$u(\beta|\tau) = vec\ (\beta|\tau)$$
$$= (\beta_{10}\quad \beta_{20}\quad \beta_{11}\quad \beta_{21})'$$

وتقريب لندلي للتوقع اللاحق لـ $u(\beta|\tau)$ يكون بالشكل التالي :

$$E(u|\beta,\tau) \cong u(\beta|\tau) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}\left[(u_{ij}|\tau + 2(u_i|\tau)(\rho_j|\tau)\right]\left(V_{ij}|\tau\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}\left[(L_{ijk}|\tau)(V_{ij}|\tau)(V_{kl}|\tau)u_l|\tau)\right] \qquad (9)$$

ويتم ايجاد مكونات المعادلة (9) كالاتي :

$\rho_j|\tau$: تمثل المشتقة الجزئية الاولى للوغاريتم الطبيعي للتوزيع الاولي لمصفوفة معلمات الانحدار β نسبة الى كل معلمة من معلمات المصفوفة β وكالاتي :

$$\rho_{10} = \frac{\partial\rho}{\partial\beta_{10}} = \frac{\partial \ln p(\beta|\tau)}{\partial\beta_{10}} \quad , \quad \rho_{11} = \frac{\partial\rho}{\partial\beta_{11}} = \frac{\partial \ln p(\beta|\tau)}{\partial\beta_{11}}$$

$$\rho_{20} = \frac{\partial \rho}{\partial \beta_{20}} = \frac{\partial \ln p(\beta|\tau)}{\partial \beta_{10}} \quad , \qquad \rho_{21} = \frac{\partial \rho}{\partial \beta_{21}} = \frac{\partial \ln p(\beta|\tau)}{\partial \beta_{10}}$$

علماً ان جميع المشتقات الجزئية اعلاه تساوي الصفر .

سوف يتم تقدير اربع معلمات لنموذج الانحدار وهي $(\beta_{10}, \beta_{11}\ ,\ \beta_{20}, \beta_{21})$ عندما تكون Σ معلومة لذلك سوف تكون حدود المجاميع في تقريب لندلي لغاية m=4 .

وحيث ان :

$$f(y_i|B, \Sigma, \tau) = \frac{1}{F(b|\tau) - F(a|\tau)\ (2\pi\tau)\ \ (\Sigma)^{1/2}}\ e^{-\frac{(y_i - \beta X)'\Sigma^{-1}(y_i - \beta X)}{2\tau}}$$

$$F(b|\tau) - F(a|\tau) = \alpha = \int_a^b \frac{1}{(2\pi\tau)\ \ (\Sigma)^{1/2}}\ e^{-\frac{\Sigma(y_i - \beta X)'\Sigma^{-1}(y_i - \beta X)}{2\tau}} dy_i$$

$$L(B|\Sigma, \tau) = \frac{1}{\alpha^*(2\pi\tau)^n(\Sigma)^{n/2}} e^{-\frac{(y_i - \beta X)'\Sigma^{-1}(y_i - \beta X)}{2\tau}} \qquad (10)$$

وفي حالة n من المتغيرات يكون :

$$\alpha^* = \int_a^b \frac{1}{(2\pi\tau)^n(\Sigma)^{n/2}}\ e^{-\frac{\sum_{i=1}(y_i - \beta X)'\Sigma^{-1}(y_i - \beta X)}{2\tau}} dy \qquad (11)$$

ليكن :

$$Q_i = (y_i - \beta X)'\Sigma^{-1}(y_i - \beta X)$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* \\ \sigma_{21}^* & \sigma_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1^* \\ \Sigma_2^* \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_1^* = [\sigma_{11}^* \quad \sigma_{12}^*]\ , \qquad \Sigma_2^* = [\sigma_{21}^* \quad \sigma_{22}^*]$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{10}} = -2\,\Sigma_1^*(y_i - \beta x_i)\ ;\ \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{10}} = -2\,\Sigma_1^* x_i(y_i - \beta x_i)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{20}} = -2\,\Sigma_2^*(y_i - \beta x_i)\ ;\ \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_{21}} = -2\,\Sigma_2^* x_i(y_i - \beta x_i)$$

$$L_1 = \frac{\partial lnl}{\partial \beta_{10}} = \frac{1}{\tau}\left[n\bar{y} - \sum_{i=1}^{n} E(c_i|\tau)\right] \qquad (12)$$

$$L_2 = \frac{\partial lnl}{\partial \beta_{11}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau}\ [y_i - E(c_i|\tau)] \qquad (13)$$

$$L_3 = \frac{\partial lnl}{\partial \beta_{20}} = \frac{1}{\tau}\left[n\bar{y} - \sum_{i=1}^{n} E(c_1|\tau)\right] \qquad (14)$$

$$L_4 = \frac{\partial lnl}{\partial \beta_{21}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau}\,[y_i - E(c_1|\tau)] \qquad (15)$$

حيث ان :

$c_i = \Sigma_1^* y_i \;;\; c_1 = \Sigma_2^* y_i$

L_1 تمثل المشتقة الاولى من المعادلة رقم (10) بالنسبة الى β_{10}

L_2 تمثل المشتقة الاولى من المعادلة رقم (10) بالنسبة الى β_{11}

L_3 تمثل المشتقة الاولى من المعادلة رقم (10) بالنسبة الى β_{20}

L_4 تمثل المشتقة الاولى من المعادلة رقم (10) بالنسبة الى β_{21}

$$L_{11} = \frac{\partial L_1}{\partial \beta_{10}} = -\frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}\left[E(c_i^2|\tau) - \left(E(c_i|\tau)\right)^2\right] \qquad (16)$$

$$L_{12} = \frac{\partial L_1}{\partial \beta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau^2}\left[E(c_i^2|\tau) - \left(E(c_i|\tau)\right)^2\right] \qquad (17)$$

$$L_{13} = \frac{\partial L_1}{\partial \beta_{20}} = -\frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}[E(c_i c_1|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_1|\tau)] \qquad (18)$$

$$L_{14} = \frac{\partial L_1}{\partial \beta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau^2}[E(c_i c_1|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_1|\tau)] \qquad (19)$$

$$L_{21} = L_{12}$$

$$L_{22} = \frac{\partial L_2}{\partial \beta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{\tau^2}\left[E(c_i^2|\tau) - \left(E(c_i|\tau)\right)^2\right] \qquad (20)$$

$$L_{23} = \frac{\partial L_2}{\partial \beta_{20}} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau^2}[E(c_i c_1|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_1|\tau)] \qquad (21)$$

$$L_{24} = \frac{\partial L_2}{\partial \beta_{11}}$$
$$= -\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{\tau^2}[E(c_i c_1|\tau) - \Sigma_2^*\, \beta x_i\, E(c_i|\tau)$$
$$- E(c_i|\tau)E(c_1|\tau) - \Sigma_1^*\, \beta x_i\, E(c_i|\tau)] \qquad (22)$$

$$L_{31} = L_{13} \;;\; L_{32} = L_{23}$$

$$L_{33} = \frac{\partial L_3}{\partial \beta_{20}} = -\frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}\left[E(c_1^2|\tau) - \left(E(c_1|\tau)\right)^2\right] \qquad (23)$$

$$L_{34} = \frac{\partial L_3}{\partial \beta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau^2}\left[E(c_1^2|\tau) - \left(E(c_1|\tau)\right)^2\right] \quad (24)$$

$$L_{44} = \frac{\partial L_3}{\partial \beta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{\tau^2}\left[E(c_1^2|\tau) - \left(E(c_1|\tau)\right)^2\right] \quad (25)$$

حيث ان :

L_{11} تمثل المشتقة الثانية من المشتقة الاولى (المعادلة رقم (12)) بالنسبة الى β_{10}

L_{12} تمثل المشتقة الثانية من المشتقة الاولى (المعادلة رقم (12)) بالنسبة الى β_{11}

L_{13} تمثل المشتقة الثانية من المشتقة الاولى (المعادلة رقم (12)) بالنسبة الى β_{20}

L_{14} تمثل المشتقة الثانية من المشتقة الاولى (المعادلة رقم (12)) بالنسبة الى β_{21}

وكذا بالنسبة الى المشتقات الباقية .

وبهذا تصبح مصفوفة المشتقات الثانية المتماثلة كما يلي :

$$L^2 = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \vdots & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ \vdots & \cdots & L_{33} & L_{34} \\ \vdots & \cdots & \cdots & L_{44} \end{bmatrix}$$

اما العناصر Lij : تمثل العنصر (ij) من معكوس المصفوفة (L2)

ونحتاج الى ايجاد المشتقة للوغاريتم دالة الامكان نسبة الى المعلمات المطلوب تقديرها وكالاتي :

$$L_{111} = \frac{\partial L_{11}}{\partial \beta_{10}} = -\frac{1}{\tau^3}\sum_{i=1}\Big[E(c_i^3|\tau) - 2\Sigma_1^* \beta x_i E(c_i^2|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_i^2|\tau) + \Sigma_1^* \beta x_i \left(E(c_i|\tau)\right)^2 + 2\left(E(c_i|\tau)\right)^3\Big] \quad (26)$$

$$L_{112} = \frac{\partial L_{11}}{\partial \beta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1} x_i}{\tau^3}\Big[E(c_i^3|\tau) - 2\Sigma_1^* \beta x_i E(c_i^2|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_i^2|\tau) + \Sigma_1^* \beta x_i \left(E(c_i|\tau)\right)^2 + 2\left(E(c_i|\tau)\right)^3\Big] \quad (27)$$

$$L_{113} = \frac{\partial L_{11}}{\partial \beta_{20}} = -\frac{1}{\tau^3}\sum_{i=1}\Big[E(c_i^2|\tau)E(c_1|\tau) + 3\Sigma_1^* \beta x_i E(c_i|\tau)E(c_1|\tau) - E(c_1|\tau)E(c_i^2|\tau) - 2E(c_i|\tau)E(c_i c_1|\tau) + \Sigma_1^* \beta x_i E(c_i c_1|\tau) + 2E(c_1|\tau)\left(E(c_i|\tau)\right)^2\Big] \quad (28)$$

$$L_{114} = \frac{\partial L_{11}}{\partial \beta_{21}} = -\frac{\sum_{i=1} x_i}{\tau^3}\Big[E(c_i^2|\tau)E(c_1|\tau) + 3\Sigma_1^* \beta x_i E(c_i|\tau)E(c_1|\tau) - E(c_1|\tau)E(c_i^2|\tau) - 2E(c_i|\tau)E(c_i c_1|\tau) + \Sigma_1^* \beta x_i E(c_i c_1|\tau) + 2E(c_1|\tau)\big(E(c_i|\tau)\big)^2\Big] \quad (29)$$

$$L_{121} = \frac{\partial L_{12}}{\partial \beta_{10}} = -\frac{\sum_{i=1} x_i}{\tau^3}\Big[E(c_i^3|\tau) - 2\Sigma_1^* \beta x_i E(c_i^2|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_i^2|\tau) + 2\,\Sigma_1^* \beta x_i\big(E(c_i|\tau)\big)^2 - 2E(c_i|\tau)^3\Big] \quad (30)$$

$$L_{122} = \frac{\partial L_{12}}{\partial \beta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1} {x_i}^2}{\tau^3}\Big[E(c_i^3|\tau) - 2\Sigma_1^* \beta x_i E(c_i^2|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_i^2|\tau) + 2\,\Sigma_1^* \beta x_i\big(E(c_i|\tau)\big)^2 - 2E(c_i|\tau)^3\Big] \quad (31)$$

$$L_{123} = \frac{\partial L_{12}}{\partial \beta_{20}} = -\frac{\sum_{i=1} x_i}{\tau^3}\Big[E(c_i^2 c_1|\tau) - E(c_i^2|\tau)E(c_1|\tau) - 2E(c_i|\tau)E(c_i c_1|\tau) + \Sigma_2^* \beta x_i\big(E(c_i|\tau)\big)^2 + \Sigma_1^* \beta x_i E(c_i c_1|\tau) + 2E(c_1|\tau)\big(E(c_i|\tau)\big)^2 - 2\,\Sigma_1^* \beta x_i\, E(c_i|\tau)E(c_1|\tau)\Big] \quad (32)$$

$$L_{124} = \frac{\partial L_{12}}{\partial \beta_{21}} = -\frac{\sum_{i=1} {x_i}^2}{\tau^3}\Big[E(c_i^2 c_1|\tau) - E(c_i^2|\tau)E(c_1|\tau) - 2E(c_i|\tau)E(c_i c_1|\tau) + \Sigma_2^* \beta x_i\big(E(c_i|\tau)\big)^2 + \Sigma_1^* \beta x_i E(c_i c_1|\tau) + 2E(c_1|\tau)\big(E(c_i|\tau)\big)^2 - 2\,\Sigma_1^* \beta x_i\, E(c_i|\tau)E(c_1|\tau)\Big] \quad (33)$$

$L_{131} = L_{113}$; $L_{132} = L_{123}$

$$L_{133} = \frac{\partial L_{13}}{\partial \beta_{20}} = -\frac{1}{\tau^3}\sum_{i=1}\Big[E(c_1^2 c_i|\tau) - 2\Sigma_2^* \beta x_i E(c_i c_1|\tau) + (\Sigma_2^* \beta x_i)^2\, E(c_i|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_1^2|\tau) + E(c_i|\tau)\big(E(c_i|\tau)\big)^2\Big] \quad (34)$$

$$L_{134} = \frac{\partial L_{13}}{\partial \beta_{21}} = -\frac{\sum_{i=1} x_i}{\tau^3}\Big[E(c_1^2 c_i|\tau) - 2\Sigma_2^* \beta x_i E(c_i c_1|\tau) + (\Sigma_2^* \beta x_i)^2\, E(c_i|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_1^2|\tau) + E(c_i|\tau)\big(E(c_i|\tau)\big)^2\Big] \quad (35)$$

$L_{141} = L_{114}$; $L_{142} = L_{124}$; $L_{143} = L_{134}$

$$L_{144} = \frac{\partial L_{14}}{\partial \beta_{21}} = -\frac{\sum_{i=1} {x_i}^2}{\tau^3}\Big[E(c_1^2 c_i|\tau) - 2\Sigma_2^* \,\beta x_i E(c_i c_1|\tau) + (\Sigma_2^* \,\beta x_i)^2 \, E(c_i|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_1^2|\tau) + E(c_i|\tau)\big(E(c_1|\tau)\big)^2\Big] \quad (36)$$

$L_{211} = L_{112}$; $L_{212} = L_{122}$; $L_{213} = L_{123}$; $L_{214} = L_{124}$; $L_{221} = L_{122}$

$$L_{222} = \frac{\partial L_{22}}{\partial \beta_{20}} = -\frac{\sum_{i=1} {x_i}^3}{\tau^3}\Big[E(c_i^3|\tau) - 2\Sigma_1^* \,\beta x_i E(c_i^2|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_i^2|\tau) + 2\big(E(c_i|\tau)\big)^3\Big] \quad (37)$$

$$L_{223} = \frac{\partial L_{22}}{\partial \beta_{20}} = -\frac{\sum_{i=1} {x_i}^2}{\tau^3}\Big[E(c_i^2 c_1|\tau) - E(c_i^2|\tau)E(c_1|\tau) - 2E(c_i|\tau)E(c_i c_1|\tau) + \Sigma_2^* \,\beta x_i\big(E(c_i|\tau)\big)^2 + \Sigma_1^* \,\beta x_i E(c_i c_1|\tau) + 2E(c_1|\tau)\big(E(c_i|\tau)\big)^2 - 2\,\Sigma_1^* \,\beta x_i \, E(c_i|\tau)E(c_1|\tau)\Big] \quad (38)$$

$$L_{224} = \frac{\partial L_{22}}{\partial \beta_{21}} = -\frac{\sum_{i=1} {x_i}^3}{\tau^3}\Big[E(c_i^2 c_1|\tau) - E(c_i^2|\tau)E(c_1|\tau) - 2E(c_i|\tau)E(c_i c_1|\tau) + \Sigma_2^* \,\beta x_i\big(E(c_i|\tau)\big)^2 + \Sigma_1^* \,\beta x_i E(c_i c_1|\tau) + 2E(c_1|\tau)\big(E(c_i|\tau)\big)^2 - 2\,\Sigma_1^* \,\beta x_i \, E(c_i|\tau)E(c_1|\tau)\Big] \quad (39)$$

$L_{231} = L_{123}$; $L_{232} = L_{223}$; $L_{233} = L_{322}$; $L_{234} = L_{324}$; $L_{311} = L_{113}$

$L_{312} = L_{123}$; $L_{313} = L_{133}$; $L_{314} = L_{134}$; $L_{321} = L_{123}$; $L_{322} = L_{223}$

$$L_{323} = \frac{\partial L_{13}}{\partial \beta_{20}} = -\frac{\sum_{i=1} x_i}{\tau^3}\Big[E(c_1^2 c_i|\tau) - 2\Sigma_2^* \,\beta x_i E(c_i c_1|\tau) + (\Sigma_2^* \,\beta x_i)^2 \, E(c_i|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_1^2|\tau) + E(c_i|\tau)\big(E(c_1|\tau)\big)^2\Big] \quad (40)$$

$$L_{324} = \frac{\partial L_{32}}{\partial \beta_{21}} = -\frac{\sum_{i=1} {x_i}^3}{\tau^3}\Big[E(c_1^2 c_i|\tau) - 2\Sigma_2^* \,\beta x_i E(c_i c_1|\tau) + (\Sigma_2^* \,\beta x_i)^2 \, E(c_i|\tau) - E(c_i|\tau)E(c_1^2|\tau) + E(c_i|\tau)\big(E(c_1|\tau)\big)^2\Big] \quad (41)$$

$L_{331} = L_{133}$; $L_{332} = L_{232} = L_{323}$

$$L_{333} = -\frac{1}{\tau^3}\left[E(c_1^3|\tau) - E(c_1|\tau)E(c_1^2|\tau)\right] \quad (42)$$

$L_{334} = L_{433}$; $L_{341} = L_{134}$; $L_{342} = L_{234}$; $L_{343} = L_{334} = L_{433}$; $L_{344} = L_{342}$

$L_{411} = L_{114}$; $L_{412} = L_{124}$; $L_{413} = L_{134}$; $L_{414} = L_{114} = L_{411}$; $L_{421} = L_{124}$

$L_{422} = L_{224}$; $L_{423} = L_{234}$

$$L_{424} = L_{244} = \frac{\partial L_{42}}{\partial \beta_{21}}$$
$$= -\frac{\sum_{i=1} {x_i}^3}{\tau^3}\Big[E(c_1^2 c_i|\tau) - 2\Sigma_2^* \beta x_i E(c_i c_1|\tau) + (\Sigma_2^* \beta x_i)^2 E(c_i|\tau)$$
$$- E(c_i|\tau)E(c_1^2|\tau) + E(c_i|\tau)\big(E(c_1|\tau)\big)^2\Big] \qquad (43)$$

$$L_{431} = L_{134} \; ; L_{432} = L_{234} \; ; L_{433} = L_{334} \; ; L_{434} = L_{344} ; L_{441} = L_{144} \; ; L_{442} = L_{244} ; \; L_{443} = L_{344}$$

$$L_{444} = \frac{\partial L_{44}}{\partial \beta_{21}} = -\frac{\sum_{i=1} {x_i}^3}{\tau^3}\Big[E(c_1^3|\tau) - 2\Sigma_2^* \beta x_i E(c_1^2|\tau) - E(c_1|\tau)E(c_1^2|\tau)$$
$$+ 2\big(E(c_1|\tau)\big)^3\Big] \qquad (44)$$

حيث ان :

L_{111} تمثل المشتقة الثالثة من المشتقة الثانية (المعادلة رقم (16)) بالنسبة الى β_{10}

L_{112} تمثل المشتقة الثالثة من المشتقة الثانية (المعادلة رقم (16)) بالنسبة الى β_{11}

L_{113} تمثل المشتقة الثالثة من المشتقة الثانية (المعادلة رقم (16)) بالنسبة الى β_{20}

L_{114} تمثل المشتقة الثالثة من المشتقة الثانية (المعادلة رقم (16)) بالنسبة الى β_{21}

وهكذا لبقية المعادلات الاخرى .

ويمكن وضع هذه المشتقات في مصفوفة متماثلة وكما يلي :

$$L^{(3)}_{16*4} = \begin{bmatrix} L_{111} & L_{112} & L_{113} & L_{114} \\ & L_{122} & L_{123} & L_{124} \\ \vdots & \ddots & L_{133} & L_{134} \\ & \ddots & & \vdots \\ L_{441} & L_{442} & L_{443} & L_{444} \end{bmatrix}$$

وباستخدام علاقات الاشكال التكعيبية[15] فانه بالامكان ايجاد القيمة المتوقعة لـ (c_i^3) المشروطة بـ (τ) وكالاتي :

$$E(c_i^3) = \Sigma_1^* \mathrm{M}_3 \, (\Sigma_1^{*T} \otimes \Sigma_1^{*T}) + 3Ec_i^2 Ec_i - 2(Ec_i)^3 \qquad (45)$$

اذ ان :

$$M_3 = E\left[\big((y_i - m)\big)(y_i - m)' \otimes (y_i - m)'|\tau\right] \qquad (46)$$

وان m يمثل العزم الاول للمتجه (yi) المشروط بـ (τ) .

M_3 : تمثل مصفوفة التوقعات ذات سعة (2x4) عناصرها مثل العزوم المركزية والعزوم المشتركة المشروطة بـ (τ) .

$$\mathrm{M}_3 = \begin{bmatrix} Ey_1^3 & Ey_1^2 y_2 & Ey_1^2 y_2 & Ey_1 y_2^2 \\ Ey_1^2 y_2 & Ey_1 y_2^2 & Ey_1 y_2^2 & Ey_2^3 \end{bmatrix}$$

اذ ان :

$$E(y_i^r) = E(y_i - Ey_i|\tau)^r|\tau$$

$$E(y_i^r y_i^s) = E(y_i - Ey_i|\tau)^r E(y_i - Ey_i|\tau)^s \qquad r \neq s$$

عندها ستكون تقديرات لندلي للمعلمات كما يلي :

$$\hat{u}_B = u + (u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 + u_4a_4 + a_5) + \frac{1}{2}[A(u_1r_{11} + u_2r_{12} + u_3r_{13} + u_4r_{14}) + B(u_1r_{21} + u_2r_{22} + u_3r_{23} + u_4r_{24}) + C(u_1r_{31} + u_2r_{32} + u_3r_{33} + u_4r_{34}) + D(u_1r_{41} + u_2r_{42} + u_3r_{43} + u_4r_{44})] \quad (47)$$

حيث ان :

$$a_1 = \rho_{10}r_{11} + \rho_{11}r_{12} + \rho_{20}r_{13} + \rho_{21}r_{14} = 0$$

$$a_2 = \rho_{10}r_{21} + \rho_{11}r_{22} + \rho_{20}r_{23} + \rho_{21}r_{24} = 0$$

$$a_3 = \rho_{10}r_{31} + \rho_{11}r_{32} + \rho_{20}r_{33} + \rho_{21}r_{34} = 0$$

$$a_4 = \rho_{10}r_{41} + \rho_{11}r_{42} + \rho_{20}r_{43} + \rho_{21}r_{44} = 0$$

$$a_5 = \frac{1}{2}[u_{11}r_{11} + u_{22}r_{22} + u_{33}r_{33} + u_{44}r_{44}] = 0$$

$$A = r_{11}L_{111} + 2r_{12}L_{121} + 2r_{13}L_{131} + 2r_{14}L_{141} + 2r_{23}L_{231} + 2r_{24}L_{241} + r_{22}L_{221} + r_{33}L_{331} + r_{44}L_{441}$$

$$B = r_{11}L_{112} + 2r_{12}L_{122} + 2r_{13}L_{132} + 2r_{14}L_{142} + 2r_{23}L_{232} + 2r_{24}L_{242} + r_{22}L_{222} + r_{33}L_{332} + r_{44}L_{442}$$

$$C = r_{11}L_{113} + 2r_{12}L_{123} + 2r_{13}L_{133} + 2r_{14}L_{143} + 2r_{23}L_{233} + 2r_{24}L_{243} + r_{22}L_{223} + r_{33}L_{333} + r_{44}L_{443}$$

$$D = r_{11}L_{114} + 2r_{12}L_{124} + 2r_{13}L_{134} + 2r_{14}L_{144} + 2r_{23}L_{234} + 2r_{24}L_{244} + r_{22}L_{224} + r_{33}L_{334} + r_{44}L_{444}$$

1.مقدر بيز للمعلمة β_{10} :

في هذه الحالة يتم ايجاد التوقع اللاحق لـ β_{10} المشروط بـ τ اي ان :

$$u(\beta_{10}|\tau) = \beta_{10}$$

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{10}} = 1 \; ; \; u_2 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{11}} = 0 \; ; \; u_3 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{20}} = 0 \; ; \; u_4 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{21}} = 0$$

$$u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_0^2} = 0$$

$$u_{12} = u_{13} = u_{21} = u_{22} = u_{23} = u_{31} = u_{32} = u_{33} = 0$$

$$\frac{\partial \rho_{10}}{\partial \beta_{10}} = \frac{\partial \rho_{20}}{\partial \beta_{11}} = \frac{\partial \rho_{20}}{\partial \beta_{20}} = \frac{\partial \rho_{21}}{\partial \beta_{21}} = 0 \rightarrow \rho_{10} = \rho_{11} = \rho_{20} = \rho_{21}$$

$$\hat{\beta}_{10B|\tau} = \hat{\beta}_{10} + \frac{1}{2}[Ar_{11} + Br_{21} + Cr_{31} + Dr_{41}]|_{\beta_{10}=\hat{\beta}_{10}}$$

اذ ان $\hat{\beta}_{10}$ يمثل مقدر المربعات الصغرى لـ β_{10}

اما مقدر بيز غير الشرطي لـ β_0 فهو :

$$\hat{\beta}_{10B} = EE\left(\hat{\beta}_{10\beta} \,|data,\tau \right) = E\int_0^{\infty} (\hat{\beta}_{10B}|\tau) f(\tau)d\tau$$

2.مقدر بيز للمعلمة β_{11} :

يتم ايجاد التوقع اللاحق لـ β_{11} المشروط بـ τ وذلك باعتبار :

$$u(\beta_{11}|\tau) = \beta_{11}$$
$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{10}} = 0 \ ; \ u_2 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{11}} = 1 \ ; \ u_3 = \frac{\partial u}{\beta_{20}} = 0 \ ; u_4 = \frac{\partial u}{\beta_{21}} = 0$$
$$u_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_{10}^2} = 0$$
$$u_{11} = u_{12} = u_{13} = u_{21} = u_{23} = u_{31} = u_{32} = u_{33} = 0$$

$$E\left(\hat{\beta}_{11B} \,|data,\tau \right) = \hat{u}_{B|\tau} = \hat{\beta}_{11} + \frac{1}{2}[Ar_{12} + Br_{22} + Cr_{32}]$$

$$\hat{\beta}_{11B} = EE\left(\hat{\beta}_{11B} \,|data,\tau \right) = E\int_0^{\infty} (\hat{\beta}_{11B}|\tau) f(\tau)d\tau$$

3.مقدر بيز للمعلمة β_{20} :

يتم ايجاد التوقع اللاحق لـ β_{20} المشروط بـ τ وذلك باعتبار :

$$u(\beta_{20}|\tau) = \beta_{20}$$
$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{10}} = 0 \ ; \ u_2 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{11}} = 0 \ ; \ u_3 = \frac{\partial u}{\beta_{20}} = 1; u_4 = \frac{\partial u}{\beta_{21}} = 0$$
$$u_{33} = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_{20}^2} = 0$$
$$u_{11} = u_{12} = u_{13} = u_{21} = u_{23} = u_{31} = u_{32} = u_{33} = 0$$

$$E\left(\hat{\beta}_{20B} \,|data,\tau \right) = \hat{u}_{B|\tau} = \hat{\beta}_{20} + \frac{1}{2}[Ar_{13} + Br_{23} + Cr_{33} + Dr_{43}]$$

$$\hat{\beta}_{20B} = EE\left(\hat{\beta}_{20B} \,|data,\tau \right) = E\int_0^{\infty} (\hat{\beta}_{20B}|\tau) f(\tau)d\tau$$

4.مقدر بيز للمعلمة β_{21} :

يتم ايجاد التوقع اللاحق لـ β_{21} المشروط بـ τ وذلك باعتبار :

$$u(\beta_{21}|\tau) = \beta_{21}$$
$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{10}} = 0 \ ; \ u_2 = \frac{\partial u}{\partial \beta_{11}} = 0 \ ; \ u_3 = \frac{\partial u}{\beta_{20}} = 0; u_4 = \frac{\partial u}{\beta_{21}} = 1$$
$$u_{44} = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_{20}^2} = 0$$

علما" ان :

$$u_{11} = u_{12} = u_{13} = u_{21} = u_{23} = u_{31} = u_{32} = u_{33} = 0$$

وعليه فان مقدر بيز لـ β_{21} المشروط بـ τ هو :

$$E\left(\hat{\beta}_{21B}\;|data,\tau\right) = \hat{u}_{B|\tau} = \hat{\beta}_{21} + \frac{1}{2}[Ar_{14} + Br_{24} + Cr_{34} + Dr_{44}]$$

$$\hat{\beta}_{21B} = EE\left(\hat{\beta}_{21B}\;|data,\tau\right) = E\int_0^{\infty}(\hat{\beta}_{21B}|\tau)f(\tau)d\tau$$

الاستنتاجات :

هناك عدة استنتاجات تم التوصل اليها وكما يلي :

يواجه تقريب لندلي صعوبة وجود الدالة التجميعية في التوزيع اللاحق ، اذ ان هذه الدالة لا يمكن معاملتها كثابت لأنها تعتمد على معلمات التوزيع الاحتمالي ، وهذه المعلمات هي متغيرات عشوائية بأسلوب بيز ومن الصعب جدا ايجاد مقدرات بيز الهامشية ، بينما بالتقريب المستخدم تمكنا من ايجاد المقدرات الهامشية من دون الحاجة الى ايجاد التوزيعات اللاحقة الهامشية.

ان جميع مقدرات معلمات الانحدار اعتمدت على عزوم متغيرات الاستجابة لغاية الرتبة الثالثة .

التوصيات :

يمكن استخدام برامج رياضية جاهزة مثل maple لايجاد المشتقات المعقدة والطويلة .

المصادر :

1- Fernandez.C, Steel..J (1997). Center for economic research .

2- Yan-Hui , S (2003) . School of Mathematics , Papers of Xiao-Zhang Scholars .

3- Alathari, M.F., Al-sarraf ,J.Z. (2008) . Al-Manarah,vol. 14 , No. 3.

4- Massuia,M. B. , Celso R. B., Larissa A. M. ,and Víctor H. L. (2007). Departamento de Estatística, Universidade Estadual de Cam pinas, Brazil .

5- Ho,H J. , Lin,T-I , Chen.H. , Wang,Wan-Lun (2012) . journal of statistical planning and inference 142 (2012) 25 – 40 , www.elsevier.com/locate/jspi

6- Hormuz, A. H. (1999. Dar Al Kutub Books and Publishing .

7- Nadarajah,saralees, Kots,Samuel,(2008) . Acta Applemeth (2008)102:99-118 , DOI 10.1007/s 10440-008-9212-8.

8- Inmaculada B. Aban,M.M. , Anna K. P (2006) : Journal of the American Statistical Association ; Vol. 101, No. 473 , March 2006 .

9- Nadarajah,saralees , Kots,Samuel,(2005) . Canadian applied , mathematics quarterly , Volume 13, Number 1, Spring 2005

10- Aljboory , Shlal Habeeb , Abd,Salah Hamza (2000) . Baghdad, Dar Al Kutub for Printing and Publishing.

11- Kelly,B.C(2007). The Astrophysical Journal ,665 : 1489-1506,2007 August 20 ; Printed in U.S.A .

12- Griffiths,W.(2001) . Dep. Of economic , university of Melbourne.

13- Mohamad ,Raya Salem ,Dham,Watheq Nathem : (2013). Iraqi Journal of Statistical Sciences, (24) 2013, pp. 51-69.

14- Al-kanani.I. H. ,Samier.F,O (2010) . Journal of college of education , No 6, 2010 , University of Baghdad , Iraq .

15- Peterson,K. B.and , Pedersen,M. S. (2012) .
http : // matrixcookbook .com