وجود ووحدانية الحل للمعادلات التكاملية – التفاضلية اللاخطية ذات الرتب الكسرية باستخدام مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة

رعد نوري بطرس و همسة داؤد سليم & أزهار حسن سلو

قسم الرياضيات / كلية التربية / جامعة الموصل

تاريخ الاستلام 2006/5/9 تاريخ القبول 2006/7/17

ABSTRACT

In this paper we study some theorems of nonlinear integro _differential equations of fractional order α ,in the case $0 < \alpha < 1$ and the case $n - 1 < \alpha < n , n = 2,3,...$, by using Banach fixed point theorem. In this study we could developed and extended some results gained by [1] by using the weaker conditions of the functions $f(t, x, y)$ and $g(t, x)$ which are measurable in t and bounded by Lebesque integrable functions .

الملخص

يتضمن هذا البحث دراسة عدد من المبرهنات المتعلقة بوجود ووحدانية الحل للمعادلات التكاملية التفاضلية اللاخطية ذات الرتب الكسرية α في الحالتين $(1 > \alpha > 0$,

$n = 2,3,...\ n - 1 < \alpha < n)$

وذلك باستخدام مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة.

استطعنا من خلال هذه الدراسة تطوير عدد من نتائج [1] وتوسيعها وذلك باستخدام شروط اضعف على الدالتين $f(t, x, y)$ و $g(t, x)$ (أي الدالتان قابلتان للقياس عند النقطة t ومقيدتان بدالتين قابلتين للتكامل على وفق مفهوم ليبيك على التوالي).

البند الأول: المقدمة

إن تاريخ مفهوم التفاضل والتكامل الكسري يمكن ان يرجع أثره الى كل من Leibnitz Euler ومنذ ذلك الحين قام العديد من العلماء بنشر ابحاث مهمة في هذا الموضوع وكانLioville اول من نشر أبحاثه إذ عرف المشتقة لأية رتبة لدالة معلومة على شكل متسلسلة قوى, وتناولت مجموعة من الدراسات المعادلات التفاضلية الكسرية وخاصة المعادلات الكسرية الخطية على سبيل المثال Bassam [3] , Diethelm [5] و [6] ,وعلى صعيد اخر فقد اتجه باحثون اخرون الى دراسة المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بعد تحويلها الى منظومة من المعادلات التفاضلية الكسرية,وهناك العديد من الدراسات في هذا الموضوع مثل [7] Mainardi, [9]Scalas , [8]Meerschaert,وجاء الباحث [1] بدراسة وجود ووحدانية الحل لعدد من المعادلات التكاملية _ التفاضلية ذات الرتب الكسرية.

أما عملنا فهو دراسة وجود ووحدانية الحل للمعادلات التكاملية - التفاضلية اللاخطية ذات الرتب الكسرية ومن الشكل في أدناه :

$$x^{(\alpha)}(t) = f\left(t, x(t), \int_t^{t+h} g(s, x(s))ds\right) \qquad n<\alpha<n-1 \qquad n\geq 2 \qquad ....(1)$$

مع الشرط الابتدائي

$$x^{(\alpha-i)}(a)=a_i \qquad i=1,2,3,...,n \qquad a\leq s\leq t\leq b \qquad ....(2)$$

$$x^{(\alpha)}(t)=f\left(t, x(t), \int_t^{t+h} g(s, x(s))ds\right) \qquad 0<\alpha<1 \qquad ....(3)$$

مع الشرط الابتدائي

$$x^{(\alpha-1)}(a)=a_1 \qquad a\leq s\leq t\leq b \qquad ....(4)$$

اذ ان $f(t, x, y)$ و $g(t, x)$ دالتين مستمرتان ومعرفتان في المجال

$$(t, x, y)\in[a, b]\times G_\alpha \times G_{1\alpha} \qquad ....(5)$$

اذ ان G_α , $G_{\alpha 1}$ مجالين مغلقين ومقيدين في R وa_i وa_1 ثوابت . من خلال هذه الدراسة استطعنا تطوير عدد من نتائج [1]وتوسيعها وذلك باستخدام شروط اضعف على الدالتين

$f(t,x,y)$ و $g(t,x)$ (أي الدالتان قابلتان للقياس عند النقطة t ومقيدتان بدالتين حسب مفهوم ليبيك للتكامل على التوالي).

تعريف 1:

إذا كانت $\alpha > 0$ فأن دالة كاما ويرمز لها بالرمز Γ تعرف بالشكل الأتي

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

بشرط التكامل موجود.

تعريف 2:

إذا كانت الدالة f قابلة للقياس في مفهوم ليبيك ومعرفة دائماً تقريباً على الفترة [a,b] و $\alpha > 0$ فإننا نعرف

$$_a^b I^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

بشرط أن يكون التكامل موجوداً.

تعريف 3:

لتكن $(S, \|.\|)$ فضاء نظيم , فاذا كانت T تطبيقاً من S الى نفسها, فان T تطبيق منكمش على S اذا وجدت $\alpha \in R$ مع $0 < \alpha < 1$ بحيث :

$$\|Tx - Ty\| \le \alpha \|x - y\| \quad ; \quad (\forall x, y \in E)$$

مبرهنة 1: (مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة)

ليكن S فضاء بناخ , فإذا كان T تطبيقاً منكمشاً على S فتوجد نقطة ثابتة واحدة وواحدة فقط x في S بحيث $Tx = x$.

تعريف 4:

اذا كانت $E \subset [a,b]$, فعند ذاك يسمى $\overline{mE}$ يسمى القياس الخارجي لــ E, ويعرف كما ياتي:

$$\overline{mE} = g.L.b|B|$$

حيث g.L.b يؤخذ على كل المجموعات المفتوحة B التي تحوي E.

والقياس الداخلي $\underline{mE}$ لــ E يعرف كما يلي :

$\underline{m}E = L.u.b|A|$

حيث L.u.b يؤخذ على كل المجموعات المغلقة A المحتواة في E.

تعريف 5:

المجموعة $E \subset [a,b]$, يقال عنها قابلة لقياس ليبيك اذا كان $\underline{m}E = \overline{m}E$. في هذه الحالة نعرف mE على انه القياس لـــ E كما يلي:

$$mE = \overline{m}E = \underline{m}E$$

تعريف 6:

لتكن f دالة معرفة على على المجموعة $S \subseteq R$ نقول ان f قياس ليبيك على E او بصورة مبسطة قابلة للقياس, اذا كان لكل $\alpha \in R$ المجموعة $\{x : x \in S, f(x) > \alpha\}$ قابلة للقياس.

تعريف 7:

لتكن f دالة قابلة للقياس الليبيكي معرفة على $S \in R$. ولتكن $L(S)$ مجموعة كل الدوال القابلة للقياس الليبيكي المعرفة على S, بحيث :

$$\int_S |f(x)|\, dx < \infty$$

تسمى المجموعة $L(S)$ مجموعة الدوال التكاملية الليبيكية وتكتب اختصاراً $f \in L(S)$.

تعريف 8:

اذا كانت f دالة مستمرة على المجموعة $S \subseteq R$ فان الدالة f قابلة للقياس على المجموعة S.

مأخوذة 1:

إذا كانت $\alpha > 0$ و $f(x)$ مستمرة على $[a,b]$ فأنه ${}_aI^{\alpha}_{x} f$ موجود ومس

$$\|Z\|_\alpha = \sup_{t\in[a,b]} \left\{ e^{-\lambda(t-s)^\alpha/\alpha} |Z(t)| \right\} \quad ,\lambda > 0 \qquad ....(7)$$

تمر على $[a,b]$.

مأخوذة 2:

لتكن S مجموعة كل الدوال المستمرة على الفترة $[a,b]$ و $z \in S$ نعرف النظيم $\|.\|$ بأنه

$$\| Z \| = \max_{t\in[a,b]} | Z(t) | \qquad ....(6)$$

عندئذ يكون $(S, \|.\|)$ فضاء بناخ .

مأخوذة 3:

لتكن S مجموعة كل الدوال المستمرة على الفترة $[a,b]$ و $z \in S$ نعرف النظيم $\|.\|$ بأنه

عندئذ يكون $(S, \|.\|_\alpha)$ فضاء بناخ.

ملاحظة (1): فيما يخص التعاريف و المأخوذات والمبرهنات انظر $[4], [3], [2]$.

البند الثاني:-وجود ووحدانية الحل للمعادلة التكاملية –التفاضلية اللاخطية الكسرية(1).

تناولنا في هذا البند دراسة وجود ووحدانية الحل للمعادلة (1)مع الشرط الابتدائي (2) وذلك باستخدام مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة على المأخوذتين (2) , (3) على التوالي .

اذ ان $f(t,x,y)$ و $g(t,x)$ دالتين مستمرتان ومعرفتان في المجال (5)وقابلتين للقياس عند t وتحققتان المتباينات التالية :

$$\|f(t,x,y)\| \le m_1(t) \quad , \quad \|g(t,x)\| \le m_2(t) \qquad ....(8)$$

$$\| f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2) \| \le L_1(t) \left(\|x_1 - x_2\| + \| y_1 - y_2 \| \right) \qquad ....(9)$$

$$\| g(t,x_1) - g(t,x_2) \| \le L_2(t) \| x_1 - x_2 \| \qquad ....(10)$$

اذ ان كلاً من $m_1(t)$, $m_2(t)$, $L_1(t)$ و $L_2(t)$ دوال قابلة للتكامل الليبيكي على الفترة $I=[a,b]$.

لكل $x, x_1, x_2 \in G_\alpha$, $y, y_1, y_2 \in G_{1\alpha}$,

لتكن b_1 أي نقطة مختارة بحيث ان b_1 وان $a \le t \le b_1$

$$\int_a^{b_1} m_1(t)dt \le c_1 \quad , \quad \int_a^{b_1} m_2(t)dt \le c_2 \qquad \text{..........(11)}$$

$$\int_a^{b_1} L_1(t)dt = \delta_1 < 1 \quad , \quad \int_a^{b_1} L_2(t)dt = \delta_2 < 1 \qquad \text{..........(12)}$$

مبرهنة 1:

لتكن كل من الدالتين $f(t,x,y)$ و $g(t,x)$ في الطرف الايمن من المعادلة (1) معرفتان ومستمرتان في المجال (5) وتحققتان المتباينات (8),(9)و(10) عندئذٍ توجد دالة وحيدة $z(t)$

$$z(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left\{f\left(s, z(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, z(\tau))d\tau\right)\right\}(t-s)^{\alpha-1}ds$$

تمثل حلاً للمعادلة التكاملية- التفاضلية اللاخطية الكسرية (1).

البرهان:-

لنفترض ان الفضاء $(S,\|.\|)$ هو الفضاء المعطى حسب الماخوذة (2), نعرف التطبيق T علىS كالاتي:

$$Tz(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left\{f\left(s, z(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, z(\tau))d\tau\right)\right\}(t-s)^{\alpha-1}ds \qquad \text{..........(13)}$$

بما ان كلاً من $f(t,x,y)$ و $g(t,x)$ دالتان مستمرتان في المجال (5) وحسب المأخوذة (1) فان

التكامل $\int_a^t f\left(t, z(t), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, z(\tau))d\tau\right)(t-s)^{\alpha-1}ds$ يكون مستمراً على نفس المجال وكذلك

الحد $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}$ مستمر لجميع قيم $t \in I$.

اذن $Tz \in S$ وهذا يعني ان التطبيق T من S الى S .

الان نبرهن ان T هو تطبيق انكماشي على المجموعة S,لتكن كل من $z, w \in S$ عندئذٍ يكون

$$\| Tz - Tw \| = \max_{t\in I}\{| Tz(t) - Tw(t)|\}$$

$$= \max_{t\in I}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left\{ f\left(s, z(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, z(\tau))d\tau\right)\right\}(t-s)^{\alpha-1}ds - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left\{ f\left(s, w(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, w(\tau))d\tau\right)\right\}(t-s)^{\alpha-1}ds\right|\right\}$$

$$\le \max_{t\in I}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left| f\left(s, z(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, z(\tau))d\tau\right) - f\left(s, w(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, w(\tau))d\tau\right)\right|(t-s)^{\alpha-1}ds\right\}$$

$$\le \max_{t\in I}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left[L_1(s)\left(|z(s)-w(s)| + \int_{b_1}^{b_1+h} |g(\tau, z(\tau)) - g(\tau, w(\tau))|\,d\tau\right)\right](t-s)^{\alpha-1}ds\right\}$$

$$\le \max_{t\in I}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left[L_1(s)\left(|z(s)-w(s)| + \int_{b_1}^{b_1+h} L_2(\tau)|z(\tau)-w(\tau)|\,d\tau\right)\right](t-s)^{\alpha-1}ds\right\}$$

$$\le \max_{t\in I} |z(t)-w(t)| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [\delta_1 + \delta_2 h] \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right\}$$

$$\le \| z-w \| \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (\delta_1 + \delta_2 h)(t-a)^{\alpha} \right]$$

$$\le \left[\frac{(\delta_1 + \delta_2 h)(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \| z-w \|$$

$$\| Tz - Tw \| \le \lambda \| z-w \|$$

إذ أن $\lambda = \dfrac{(\delta_1 + \delta_2 h)(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$

وباختيار $0<\lambda<1$ نجد ان T هو تطبيق انكماشي على المجموعة S وبموجب مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة فأن للتطبيق T نقطة ثابتة واحدة وواحدة فقط أي $Tz(t)=z(t)$, إذا $z(t)$ يمثل الحل الوحيد للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية الكسرية (1).

مبرهنة 2:

لتكن كل من الدالتين $f(t,x,y)$ و $g(t,x)$ في الطرف الايمن من المعادلة (1) معرفتان ومستمرتان في المجال (5) وتحققتان المتباينات (8),(9)و(10) عندئذٍ توجد دالة وحيدة $z(t)$ تمثل حلاً للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية الكسرية (1).

البرهان:-

لنفترض ان الفضاء $(S, \|.\|_{\alpha})$ هو الفضاء المعطى حسب الماخوذة (3), نعرف التطبيق T علىS كما هو معرف في المعادلة (13), ومن المبرهنة (1) T هو تطبيق من S الى S .

الان نبرهن ان T هو تطبيق انكماشي على المجموعة S , لتكن كل من $z,y\in S$ عندئذٍ يكون

$$\| Tz - Ty \| = \sup_{t\in I}\left\{ e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha} \left| Tz - Ty \right| \right\}$$

$$= \sup_{t\in I}\left\{ e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha} \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i (t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f\left(s, z(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, z(\tau)) d\tau \right) (t-s)^{\alpha-1} ds - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i (t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f\left(s, y(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, y(\tau)) d\tau \right) (t-s)^{\alpha-1} ds \right| \right\}$$

$$\leq \sup_{t\in I}\left\{ e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left| f\left(s, z(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, z(\tau)) d\tau \right) - f\left(s, y(s), \int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau, y(\tau)) d\tau \right) \right| (t-s)^{\alpha-1} ds \right\}$$

$$\leq \sup_{t\in I}\left\{ e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left[L_1(s) \left(|z(s)-y(s)| + \int_{b_1}^{b_1+h} |g(\tau, z(\tau)) - g(\tau, y(\tau))| d\tau \right) \right] (t-s)^{\alpha-1} ds \right\}$$

$$\leq \sup_{t\in I}\left\{ e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left[L_1(s) \left(|z(s)-w(s)| + \int_{b_1}^{b_1+h} L_2(\tau) |z(\tau)-w(\tau)| d\tau \right) \right] (t-s)^{\alpha-1} ds \right\}$$

$$\leq \sup_{t\in I}\left[e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha} |z(s)-y(s)| \right] \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [\delta_1 + \delta_2] \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right\}$$

$$\leq \| z - y \| \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\delta_1 + \delta_2 \right) (t-a)^{\alpha} \right]$$

$$\leq \left[\frac{(\delta_1 + \delta_2)(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \| z - y \|$$

$$\| Tz - Ty \| \leq \mu \, \| z - y \|$$

اذ أن $\mu = \frac{(\delta_1 + \delta_2)(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$, وباختيار $0 < \lambda_1 < 1$ نجد أن T هو تطبيق انكماشي على المجموعة S وبموجب مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة فأن للتطبيق T نقطة ثابتة واحدة وواحدة فقط أي $Tz(t) = z(t)$,اذاً $z(t)$ يمثل الحل الوحيد للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية الكسرية (1) .

البند الثالث:-وجود ووحدانية الحل للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية الكسرية (3)

في هذا البند تم دراسة وجود ووحدانية الحل للمعادلة التكاملية-التفاضلية اللاخطية الكسرية (3) مع الشرط الابتدائي (4) باستخدام مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة على الماخوذتين (2) , (3) على التوالي

اذ أن $f(t,x,y)$ و $g(t,x)$ دالتين مستمرتان و معرفتان في المجال (5)و قابلتين للقياس عند t وتحققتان المتباينات الآتية :

$$\|f(t,x,y)\| \le M \qquad , \qquad \|g(t,x)\| \le N \qquad \text{.........}(14)$$

$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \le L_1 \left(\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|\right) \qquad \text{..........}(15)$$

$$\|g(t,x_1) - g(t,x_2)\| \le L_2 \|x_1 - x_2\| \qquad \text{.........}(16)$$

لكل $x, x_1, x_2 \in G_{\alpha}$, $y, y_1, y_2 \in G_{1\alpha}$ حيث ان كل من M, N, L_1, L_2 هي ثوابت موجبة.

مبرهنة 3:

لتكن كل من الدالتين $f(t,x,y)$ و $g(t,x)$ في الطرف الايمن من المعادلة (3) معرفتان ومستمرتان في المجال (5) وتحققتان المتباينات (14),(15)و(16) عندئذٍ توجد دالة وحيدة $y(t)$ تمثل حلاً للمعادلة التكاملية– التفاضلية اللاخطية الكسرية (3).

البرهان:-

لنفترض ان الفضاء $(S,\|.\|)$ هو الفضاء المعطى حسب الماخوذة (2), نعرف التطبيق T على S كما يلي :

$$Ty(t)=\frac{a_1(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(s,y(s,)\int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau,y(\tau))d\tau)(t-s)^{\alpha-1}ds \quad ....(17)$$

حسب المأخوذة (1) فان التكامل $\int_a^t f\left(t,z(t),\int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau,z(\tau))d\tau\right)(t-s)^{\alpha-1}ds$ يكون مستمراً على نفس المجال وكذلك الحد $\frac{a_1(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ مستمر لجميع قيم $t\in I$.

الان نبرهن ان T هو تطبيق انكماشي على المجموعة S , لتكن كل من $y,w\in S$ عندئذ يكون

$$\|Ty-Tw\|=\max_{t\in I}\{|Ty-Tw|\}$$

$$=\max_{t\in I}\left\{\left|\frac{a_1(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left\{f\left(s,y(s),\int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau,y(\tau))d\tau\right)\right\}(t-s)^{\alpha-1}ds-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{a_1(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left\{f\left(s,w(s),\int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau,w(\tau))d\tau\right)\right\}(t-s)^{\alpha-1}ds\right|\right\}.$$

$$\le\max_{t\in I}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left|f(s,y(s),\int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau,y(\tau))d\tau)-f(s,w(s),\int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau,w(\tau))d\tau)\right|(t-s)^{\alpha-1}ds\right\}$$

$$\le\max_{t\in I}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left[L_1\left(|y(s)-w(s)|+\int_{b_1}^{b_1+h} L_2|y(\tau)-w(\tau)|\right)\right](t-s)^{\alpha-1}ds\right\}$$

$$\leq\left[\frac{(L_1+L_2h)(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|y-w\|$$

$$\|Ty-Tw\| \leq \Delta \ \|y-w\|$$

اذ ان $\Delta=\dfrac{(L_1+L_2h)\,(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$, وباختيار $0<\Delta_1<1$ نجد أن T هو تطبيق انكماشي على المجموعة S وبموجب مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة فأن للتطبيق T نقطة ثابتة واحدة وواحدة فقط أي $Ty(t)=y(t)$, اذاً $y(t)$ يمثل الحل الوحيد للمعادلة التكاملية- التفاضلية اللاخطية الكسرية (3).

مبرهنة 4:

لتكن كل من الدالتين $f(t,x,y)$ و $g(t,x)$ في الطرف الايمن من المعادلة (3) معرفتان ومستمرتان في المجال (5) وتحققتان المتباينات (14),(15)و(16) فأنه توجد دالة وحيدة $y(t)$ بحيث ان

$$y(t)=\frac{a_1(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\int_a^t f(s,y(s),\int_{b_1}^{b_1+h} g(\tau,y(\tau))d\tau)(t-s)^{\alpha-1}ds$$

تمثل حلاً للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية الكسرية (3).

البرهان:-

لنفترض ان الفضاء $(S,\|.\|_{\alpha})$ هو الفضاء المعطى حسب المأخوذة (3), نعرف التطبيق T علىS كما هو معرف في المعادلة (17) ومن المبرهنة (3) فان T تطبيق من S الى S .

الان نبرهن ان T هو تطبيق انكماشي على لمجموعة S , لتكن كل من $y,w\in S$ عندئذ يكون

$$\|Ty-Tw\|=\sup_{t\in I}\left\{e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha}|Ty-Tw|\right\}$$

$$=\sup_{t\in I}\left\{e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha}\left|\frac{a_1(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f\left(s,y(s),\int_{b_1}^{b_1+h}g(\tau,y(\tau))d\tau\right)(t-s)^{\alpha-1}ds-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{a_1(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t f\left(s,w(s),\int_{b_1}^{b_1+h}g(\tau,w(\tau))d\tau\right)(t-s)^{\alpha-1}ds\right|\right\}$$

$$\leq\sup_{t\in I}\left\{e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left|f\left(s,y(s),\int_{b_1}^{b_1+h}g(\tau,y(\tau))d\tau\right)-f\left(s,w(s),\int_{b_1}^{b_1+h}g(\tau,w(\tau))d\tau\right)\right|(t-s)^{\alpha-1}ds\right\}$$

$$\leq\sup_{t\in I}\left\{e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left[L_1\left(|y(s)-w(s)|+\int_{b_1}^{b_1+h}L_2|y(\tau)-w(\tau)|d\tau\right)\right](t-s)^{\alpha-1}ds\right\}$$

$$\leq\sup_{t\in I}\left\{e^{-\lambda(t-s)^{\alpha}/\alpha}|y(t)-w(t)|\right\}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(L_1+L_2h)(t-s)^{\alpha-1}ds\right\}$$

$$\leq\left[\frac{(L_1+L_2h)(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|y-w\|$$

$$\|Ty-Tw\|\leq\Psi\|y-w\|$$

اذ ان $\Psi=\dfrac{(L_1+L_2)(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$, وباختيار $0<\Delta<1$ نجد أن T هو تطبيق انكماشي على المجموعة S وبموجب مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة فأن للتطبيق T نقطة ثابتة وواحدة فقط أي $Ty(t)=y(t)$ اذاً, $y(t)$ يمثل الحل الوحيد للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية الكسرية (3).

ملاحظة (2):

من المبرهنتين (1) و (2) حصلنا على حل شامل (Global solution) للمعادلة التكاملية – التفاضلية اللاخطية (1) مع الشرط الابتدائي (2) وذلك باستخدام شرط ليبشز المعمم (9) و(10) وبأخذ قيمة α $(n-1<\alpha<n \;\;,\;\; n\geq 2)$. اما في المبرهنتين (3) و (4) حصلنا

على حل موضعي (Local solution) للمعادلة التكاملية - التفاضلية اللاخطية (3) مع الشرط الابتدائي (4) وذلك باستخدام شرط ليبشز (15)و(16) وبأخذ قيمة α $(0 < \alpha < 1)$.

REFERENCES

1. AL – Aidaroos H.A., Thesis M.Sc. Iraq, Mosul University (1999).
2. Barret J.H., Canad. J. Maths,No. 6: 529-541 (1954).
3. Bassam, M.A., Eurdie Reive and Aynewardte Mathematic (1965).
4. Butris, R.N., Thesis M.Sc. Iraq, Mosul University, (1984).
5. Diethelm K., Ford N., Numerical Analysis Report ., 379: (2001).
6. Diethelm K., Ford N., Appl. Math &Comput (2003).
7. Maindari F.,Fractionals calculus, No. 5: 291-238 (1997).
8. Meerschaert M.C.,J.Comput, No. 1:249-261(2006).
9. Scalas E,R., gorenflo and Mainardi F,A284, 376-384 (2000).