تقنية نسبية بديلة لحل مسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف

د. باسم عباس حسن　　د. عباس يونس البياتي　　براءة محمود سليمان

قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسبات والرياضيات

جامعة الموصل

الاستلام	القبول
٣٠ / ٠٦ / ٢٠١٠	١٢ / ٠٤ / ٢٠١١

Abstract

In this paper, we have been suggested an alterative rational technique to compute the value of the objective function of a multi-objective linear programming problems. Numerical results indicate that the efficiency of our proposed technique corresponding to standard Chandra Sen method is very effective according to a number of selected test problems.

المستخلص

في هذا البحث تم اقتراح تقنية نسبية بديلة لحساب قيم دالة الهدف في مسائل البرمجة الخطية متعددة الأهداف . النتائج العددية أثبتت كفاءة طريقة المقترحة الجديدة مقارنة بطريقة Chandra Sen القياسية وبالاعتماد على عدد من المسائل المختارة.

أولاً: صياغة نموذج البرمجة الخطية:

هدف صياغة نموذج البرمجة الخطية هو الوصول إلى مرحلة حل نموذج، و حل نموذج يعني إيجاد قيم المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ التي تجعل قيمة دالة الهدف أكبر أو اصغر ما يمكن.

$$\begin{aligned}
&Minimum\ or\ Maximum\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\\
&Subject\ to\\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le or = or \ge b_1\\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le or = or \ge b_2\\
&\quad \vdots\\
&\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le or = or \ge b_m\\
&\qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned} \tag{1}$$

حيث أن :

n : عدد المنتجات و $j=1,2,\ldots,n$ ، j تدل على المنتج.

m : عدد المراحل و $i=1,2,\ldots,m$ ، i تدل على الوحدة الإنتاجية.

a_{ij} : ما تحتاجه الوحدة الواحدة من عنصر الإنتاج لإنتاجها (عدد ساعات العمل اللازمة في المرحلة الإنتاجية : الإنتاج وحدة واحدة من المنتج j) أو عدد رأس المال التي تحتاجها الوحدة الواحدة للإنتاج أو عدد العمال الذين تحتاجها الوحدة الواحدة أو عنصر إنتاج آخر.

b_j : عناصر الإنتاج المتاحة (عدد ساعات العمل، كمية المواد الأولية، كمية العمالة، رأس المال ... أو أي عنصر من الإنتاج المتاحة في المرحلة الإنتاجية i .

c_j : ربح الوحدة الواحدة للمنتج j كلفته.

x_j : عدد الوحدات إنتاجها (المراد معرفتها) من السلعة j. [3, 1]

ثانياً: البرمجة الخطية متعددة الأهداف:

إن طريقة حل مسألة التصميم الأمثل متعدد الأهداف مشابهة لطريقة حل مسألة الهدف الوحيد. وفكرة حل مسألة الهدف الوحيد هي إيجاد مجموعة القيم لمتغيرات التصميم عندما تكون خاضعة لمجموعة من القيود تقود إلى القيمة المثلى لدالة الهدف (أو الكلفة). وبصورة عامة يتم الحصول على الحلول المثلى لمسائل متعددة الأهداف من قِبَل الأفراد . إن تحقيق أمثلية الأهداف (أي أمثلية الهدف الوحيد) ليس حلاً ممكناً لمسألة متعددة الأهداف لأن مسائل الأمثلية متعددة الأهداف بصورة عامة لا تملك حل وحيد كما في مسائل البرمجة ذات الهدف الوحيد. [4, 2]

في [6, 5] الصيغة القياسية للبرمجة الخطية تحوي دالة هدف يُراد تعظيمها أو تصغيرها وتخضع لقيود خطية. وعند وجود أكثر من دالة خطية ومطلوب إيجاد الحل الأمثل لها وبشكل آني، عندها تكون المسألة مسألة برمجة خطية متعددة الأهداف . والصيغة الرياضية لهذا النوع من المسائل تعطى كالآتي:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ z_1 = c_1^t.x + a_1 \\ Max\ z_2 = c_2^t.x + a_2 \\ Max\ z_r = c_r^t.x + a_r \\ Max\ z_{r+1} = c_{r+1}^t.x + a_{r+1} \\ \vdots \\ Max\ z_s = c_s^t.x + a_s \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$subject\ to$$

$$A.X = B \qquad (3)$$

$$X \geq 0 \qquad (4)$$

حيث s عدد جميع دوال الهدف الموجودة في المسألة، r عدد دوال الهدف المراد تعظيمها، $(s-r)$ عدد دوال الهدف المراد تصغيرها، X متجه بُعده n يضم متغيرات القرار ، C متجه بُعده m يمثل القيود، B متجه بُعده n يمثل ثوابت القيود، و A مصفوفة المعاملات سعة $(m\times n)$، a_i ثوابت و $C^t.X+a_i$ عوامل خطية للحلول الممكنة حيث $(i=1,2,3,\ldots,s)$.

وعندما يكون لدينا $a_i=0$ لكل $(i=1,2,3,\ldots,s)$ تصبح المسألة كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ z_1=c_1^t.x \\ Max\ z_2=c_2^t.x \\ Max\ z_r=c_r^t.x \\ Max\ z_{r+1}=c_{r+1}^t \\ \vdots \\ Max\ z_s=c_s^t.x \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$Subject\ to$$

$$A.X=B \quad (6)$$

$$X\geq 0 \quad (7)$$

في عام 1983 عرّف Sen [5] البرمجة الخطية متعددة الأهداف واقترح أسلوباً مشروطاً لحلها وشرطه أن يكون الحل الأمثل للمسألة المنفردة أكبر من الصفر.

ثالثاً: طرائق حل مسألة البرمجة الخطية متعددة الأهداف

من أكثر الأساليب المستخدمة لحل مسألة البرمجة الخطية متعددة الأهداف هو أسلوب Chandra Sen، فقد قام Sen بتقديم مسألة البرمجة الخطية متعددة الأهداف عام 1983، واقترح أسلوباً لتكوين دالة متعددة الأهداف بشرط أن تكون القيمة المثلى للمسألة المنفردة أكبر من الصفر . والأسلوب موضح كما يلي : نفرض بأننا حصلنا على قيمة منفردة تتوا فق مع جميع دوال الأهداف عند إيجاد الحل الأمثل لكل دالة على حدة وطبقاً للقيود (2) و(3) وكما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ z_1=\phi_1 \\ Max\ z_2=\phi_2 \\ Max\ z_r=\phi_r \\ Max\ z_{r+1}=\phi_{r+1} \\ \vdots \\ Max\ z_s=\phi_s \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$Subject\ to$$

$$A.X=B \quad (9)$$

$$X \geq 0 \tag{10}$$

حيث ϕ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, s)$ متغيرات القرار والتي ليس من الضروري أن تكون مشتركة بين جميع الحلول المثلى لدوال الأهداف . ولكن عند اختيار أفضل حل وسط تكون المجموعة المشتركة لمتغيرات القرار بين دوال الأهداف ضرورية . ونستطيع أن نحدد المجموع ة المشتركة لمتغيرات القرار من دالة الهدف المركبة الآتية والتي تعيد صياغة المسألة (1) كما يلي:

$$Max\ Z = \sum_{k=1}^{r} Z_k \big/ |\phi_k| - \sum_{k=r+1}^{s} Z_k \big/ |\phi_k| \tag{11}$$
$$\forall \quad Z_k \neq 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, s$$

وطبقاً لنفس القيود (2) و(3) والقيمة المثلى للدوال هي $\phi_k \in R \setminus \{0\}$ حيث R تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية [5]. أما في عام (2006) فقد درس سليمان وصادق حل مسألة البرمجة الخطية متعددة الأهداف باستخدام الوسط الحسابي وتم مقارنة نتائج الطريقة بنتائج طريقة Sen [7]. وفي عام (2008) قدم سليمان وعبد القادر تقنية ج ديدة تستخدم المعدل الأمثل (O_{AV}) للدالة [6].

رابعاً: الهدف من البحث:

إن الهدف من هذا البحث هو اقتراح طريقة جديدة للتوصل إلى حل مسألة البرمجة الخطية متعددة الأهداف ومقارنتها مع مثيلاتها من الطرائق المستخدمة في حل هذه المنظومة من المعادلات الخطية.

خامساً: الطريقة المقترحة:

فلسفة الطريقة المقترحة تعتمد على صياغة دالة هدف مركبة وذلك لتحديد المجموعة المشتركة لمتغيرات القرار وقبل توضيح صيغة دالة الهدف المركبة وتقديم خطوات الطريقة من الضروري معرفة تعاريف المصطلحات التالية:

تعريف (1): ليكن $Max_{Max} Z_i = \phi_i$ حيث ϕ_i هي أكبر قيمة لدالة الهدف Z_i لكل $(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$.

تعريف (2): ليكن $Max_{Min} Z_i = \phi_i$ حيث ϕ_i هي أكبر قيمة لدالة الهدف Z_i لكل $(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$.

تعريف (3): ليكن $Min_{Max} Z_i = \phi_i$ حيث ϕ_i هي أكبر قيمة لدالة الهدف Z_i لكل $(i = r, r+1, .., s)$.

تعريف (4): ليكن $Min_{Min} Z_i = \phi_i$ حيث ϕ_i هي أصغر قيمة لدالة الهدف Z_i لكل $(i = r, r+1, .., s)$.

بعد حصولنا على قيمة منفردة تتوافق مع جميع دوال الأهداف عند إيجاد الحل الأمثل لكل دالة على حدة وطبقاً للقيود (2) و(3) نجد الخط المستقيم الملائم حسب الفرضية التالية

$$SG = \frac{\sum_{i=1}^{r} Z_i}{Max_{Max} Z_i - Max_{Min} Z_i} \quad , \quad i = 1,2,3,\dots,r \tag{12}$$

$$DL = \frac{\sum_{i=r+1}^{s} Z_i}{Min_{Max} Z_i - Min_{Min} Z_i} \quad , \quad i = r, r+1,\dots,s \tag{13}$$

إن أصل الفرضية في المعادلتين (١٢) و (١٣) أعلاه يرجع إلى إيجاد امثل خط مستقيم يمكن إمراره بين الخطوط المستقيمة الخاصة بدوال التعظيم و كذلك الخاصة بدوال التصغير (في منطقة الحل) و وكما موجود في المعادلتين أعلاه على التوالي نستطيع أن نحدد (على أساس optimal curve fitting) المجموعة المشتركة للمتغيرات بدالة الهدف المركبة الآتية

$$\begin{aligned} &Max\ Z = SG - DL \\ &\quad \forall \quad Z_i \neq 0; \qquad i = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \tag{14}$$

خطوات الطريقة المقترحة:

الخطوة 1: جد قيم جميع دوال الهدف كل على حدة (سواء كانت دالة تعظيم أو دالة تصغير).

الخطوة 2: جد الحل الأمثل لدالة الهدف الأولى باستخدام إحدى طرائق البرمجة الخطية.

الخطوة 3: إذا كان الحل الناتج من الخطوة 2 حلاً ممكناً اذهب إلى الخطوة 4 وإلا استخدم طريقة السمبلكس المقابلة لحذف جميع الحلول غير الممكنة.

الخطوة 4: لتكن ϕ_1 الحل الأمثل لدالة الهدف الأولى Z_1.

الخطوة 5: كرر الخطوات 2 و 3 لجميع دوال الهدف Z_i حيث $(i = 1, 2, 3, \dots, s)$.

الخطوة 6: جد قيم كل من $Max_{Max} Z_i$ و $Max_{Min} Z_i$ حيث $i = 1, 2, 3, \dots, r$ و $Min_{Max} Z_i$ و $Min_{Min} Z_i$ حيث $i = r, r+1, \dots, s$ ، ثم جد كل من SG و DL من (12) و(13) على التوالي.

الخطوة 7: أنشأ دالة الهدف المركبة والتي لها الصيغة الموضحة في المعادلة (14).

الخطوة 8: جد الحل الأمثل لدالة الهدف المركبة وباستخدام نفس القيود (2) و(3) وذلك بتكرار الخطوتين (2)-(3).

سادساً: أمثلة توضيحية

تم تطبيق الطريقة المقترحة على جميع الأمثلة في [7, 6] وقد أثبتت كفاءتها، وفي هذه الفقرة سوف نستعرض هذه الأمثلة للتوضيح:

__المثال 1__: ليكن لدينا البرمجة الخطية متعددة الأهداف الآتية :

$$\begin{aligned}
&Max\ Z_1 = 3x + 2y\\
&Max\ Z_2 = 4x + y\\
&Max\ Z_3 = 4x - 2y\\
&Max\ Z_4 = 15x + 4y\\
&Min\ Z_5 = -6x + 2y\\
&Min\ Z_6 = -9x + 3y\\
&Min\ Z_7 = -5x + 2y\\
&Subject\ to:\\
&\qquad x + y \le 4\\
&\qquad x - y \le 2\\
&\qquad x,\ y \ge 0
\end{aligned}$$

الحل:

في البداية باستخدام طريقة السمبلكس نجد الحل الأمثل لكل دالة هدف على حدة، لنحصل على:

$$\begin{aligned}
&Z_1 = 11\ ,\ x = 3\ ,\ y = 1\\
&Z_2 = 13\ ,\ x = 3\ ,\ y = 1\\
&Z_3 = 10\ ,\ x = 3\ ,\ y = 1\\
&Z_4 = 49\ ,\ x = 3\ ,\ y = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Z_5 = -16,\ x = 3\ ,\ y = 1\\
&Z_6 = -24\ ,\ x = 3\ ,\ y = 1\\
&Z_7 = -13,\ x = 3\ ,\ y = 1
\end{aligned}$$

باستخدام الطريقة المقترحة سنحصل على دالة الهدف المركبة الآتية

$$SG = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{Max_{Max} Z_i - Max_{Min} Z_i} = \frac{26x + 5y}{39} = 0.6666666x + 0.1282051y$$

$$DL = \frac{Z_5 + Z_6 + Z_7}{Min_{Max}Z_i - Min_{Min}Z_i} = \frac{-20x + 7y}{11} = -1.8181818x + 0.6363636y$$

$$Max\ Z = SG - DL = 0.6666666x + 0.1282051y + 1.8181818x - 0.6363636y$$
$$= 2.4848484x - 0.5081585y$$

$$Max\ Z = 2.4848484x - 0.5081585y$$
$$Subject\ to:$$
$$x + y \le 4$$
$$x - y \le 2$$
$$x\ ,\ y \ge 0$$

نحل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس لنحصل على

$$Max\ Z_{New} = 6.946387\ ,\ x = 3\ ,\ y = 1$$

وتم حل نفس المسألة باستخدام طريقة Sen وحصلنا على النتيجة التالية

$$Max\ Z_{Sen} = 7.02\ ,\ x = 3\ ,\ y = 1$$

طريقة Sen تبحث عن القيمة العظمى المحلية Local Maxima لذا من الممكن الوصول إلى نقطتين مختلفتين لقيم Z مختلفة.

<u>المثال 2</u>: ليكن لدينا البرمجة الخطية متعددة الأهداف الآتية :

$$Max\ Z_1 = x$$
$$Max\ Z_2 = x + y$$
$$Subject\ to:$$
$$5x + 2y \le 22$$
$$y \le 6$$
$$x\ ,\ y \ge 0$$

الحل:

في البداية باستخدام طريقة السمبلكس نجد الحل الأمثل لكل دالة هدف على حدة، لنحصل على :

$$Z_1 = 4.4\ ,\ x = 4.4\ ,\ y = 0$$
$$Z_2 = 8\ ,\ x = 2\ ,\ y = 6$$

باستخدام الطريقة المقترحة سنحصل على دالة الهدف المركبة الآتية

$$SG = \frac{Z_1 + Z_2}{Max_{Max}Z_i - Max_{Min}Z_i} = \frac{2x + y}{3.6} = 0.555555x + 0.277777y$$

$$DL = 0$$

$$Max\ Z = SG - DL = 0.555555x + 0.277777y$$

$$Max\ Z = 0.555555x + 0.277777y$$

$$Subject\ to:$$

$$5x + 2y \le 22$$

$$y \le 6$$

$$x\ ,\ y \ge 0$$

نحل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس لنحصل على

$$Max\ Z_{New} = 2.777772\ ,\ \ x = 2\ \ ,\ y = 6$$

وتم حل نفس المسألة باستخدام طريقة Sen وحصلنا على النتيجة التالية

$$Max\ Z_{Sen}\ = 1.550120\ \ ,\ x = 4.4\ ,\ y = 0$$

<u>المثال 3</u>: ليكن لدينا البرمجة الخطية متعددة الأهداف الآتية :

$$Max\ Z_1 = \ \ x + 2y$$

$$Max\ Z_2 = \ \ x + 0y$$

$$Min\ Z_3 = -2x - 3y$$

$$Min\ Z_4 = \ \ 0x - 1y$$

$$Subject\ to:$$

$$6x + 8y \le 48$$

$$x + \ \ y \ge 3$$

$$x + 0y \le 4$$

$$0x + 1y \le 3$$

$$x\ ,\ y \ge 0$$

الحل:

في البداية باستخدام طريقة السمبلكس نجد الحل الأمثل لكل دالة هدف على حدة، لنحصل على :

$$Z_1 = 10\ \ ,\ x = 4\ ,\ y = 3$$

$$Z_2 = 4\ \ \ ,\ x = 4,\ y = 3$$

$$Z_3 = -17\ ,\ x = 4\ ,\ y = 3$$

$$Z_4 = -3\ \ ,\ x = 4\ ,\ y = 3$$

باستخدام الطريقة المقترحة سنحصل على دالة الهدف المركبة الآتية:

$$SG = \frac{Z_1 + Z_2}{Max_{Max}Z_i - Max_{Min}Z_i} = \frac{2x + 2y}{6} \ \ = 0.3333333x + 0.3333333y$$

$$DL=\frac{Z_3+Z_4}{Min_{Max}Z_i-Min_{Min}Z_i}=\frac{-2x-4y}{14}=-0.1428571x-0.2857142y$$

$$Max\ Z=SG-DL=0.3333333x+0.3333333y+0.1428571x+0.2857142y$$
$$=0.4761904x+0.6190475y$$

$$Max\ Z=0.4761904x+0.6190475y$$
$$Subject\ to:$$
$$6x+8y\le 48$$
$$x+\ \ y\le 3$$
$$x+0y\le 4$$
$$0x+1y\le 3$$
$$x\ ,\ y\ge 0$$

نحل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس لنحصل على

$$Max\ Z_{New}=3.761904\ ,\quad x=4\ ,\quad y=3$$

وتم حل نفس المسألة باستخدام طريقة Sen وحصلنا على النتيجة التالية

$$Max\ Z_{Sen}=3.39996\quad ,\quad x=4\ ,\quad y=3$$

<u>المثال 4</u> : ليكن لدينا البرمجة الخطية متعددة الأهداف الآتية:

$$Max\ Z_1=2x+\ \ y+5$$
$$Max\ Z_2=3x+\ y+7$$
$$Max\ Z_3=2x+2y+6$$
$$Min\ Z_4=3x+\ \ y+3$$
$$Min\ Z_5=3x+2y+8$$
$$Min\ Z_6=\ \ x+3y+2$$
$$Subject\ to:$$
$$x+\ \ y\ge 1$$
$$3x+2y\le 6$$
$$2x+4y\le 8$$
$$x\ ,\ y\ge 0$$

الحل:

في البداية باستخدام طريقة السمبلكس نجد الحل الأمثل لكل دالة هدف على حدة، لنحصل على:

$$Z_1 = 9 \quad , \; x = 2 \; , \; y = 0$$
$$Z_2 = 13 \quad , \; x = 2 \; , \; y = 0$$
$$Z_3 = 11 \quad , \; x = 1 \; , \; y = 1.5$$
$$Z_4 = 4 \quad , \; x = 0 \; , \; y = 1$$
$$Z_5 = 10 \quad , \; x = 0 \; , \; y = 1$$
$$Z_6 = 3 \quad , \; x = 1, \; y = 0$$

باستخدام الطريقة المقترحة سنحصل على دالة الهدف المركبة الآتية:

$$SG = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Max_{Max} Z_i - Max_{Min} Z_i} = \frac{7x + 4y + 18}{4} = 1.75x + y + 4.5$$

$$DL = \frac{Z_4 + Z_5 + Z_6}{Min_{Max} Z_i - Min_{Min} Z_i} = \frac{7x + 6y + 13}{7} = x + 0.85714y + 1.85714$$

$$\begin{aligned} Max\ Z = SG - DL &= 1.75x + y + 4.5 - x - 0.85714y - 1.85714 \\ &= 2.64286 + 0.75x + 0.14286y \end{aligned}$$

$$Max\ Z = 2.64286 + 0.75x + 0.14286y$$

$Subject\ to$:

$$\begin{aligned} x + \; y &\ge 1 \\ 3x + 2y &\le 6 \\ 2x + 4y &\le 8 \\ x\ , \; y &\ge 0 \end{aligned}$$

نحل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس لنحصل على

$$Max\ Z_{New} = 4.14286 \; , \quad x = 2 \; , \quad y = 0$$

وتم حل نفس المسألة باستخدام طريقة Sen وحصلنا على النتيجة التالية

$$Max\ Z_{Sen} = -1.32574, \quad x = 1 \; , \quad y = 0$$

سابعاً: الاستنتاجات

في هذا البحث تم مقارنة الطريقة الجديدة المقترحة مع طريقة Sen القياسية لحل مسألة البرمجة الخطية متعددة الأهداف وتم تطبيقها على عدة أمثلة وقد تم ملاحظة إن نتائج الطريقة المقترحة أفضل من نتائج طريقة سين Sen. بما أن النتائج الناتجة باستخدام الطريقة المقترحة أفضل وأحسن من النتائج الناتجة عند استخدام طريقة سين Sen. إذن الطريقة المقترحة أفضل من طريقة سين Sen وكما موضح في الجدول التالي:

الأمثلة	طريقة Sen	الطريقة المقترحة
مثال (6-1)	$Max\ Z_{Sen} = 7.02$ $x = 3\ ,\ \ y = 1$	$Max\ Z_{New} = 6.946387$ $x = 3\ ,\ \ y = 1$
مثال (6-2)	$Max\ Z_{Sen} = 1.550120$ $x = 4.4\ ,\ \ y = 0$	$Max\ Z_{New} = 2.777772$ $x = 2\ ,\ \ y = 6$
مثال (6-3)	$Max\ Z_{Sen} = 3.39996$ $x = 4\ ,\ \ y = 3$	$Max\ Z_{New} = 3.761904$ $x = 4\ ,\ \ y = 3$
مثال (6-4)	$Max\ Z_{Sen} = -1.32574$ $x = 1\ ,\ \ y = 0$	$Max\ Z_{New} = 4.14286$ $x = 2\ ,\ \ y = 0$

من خلال النتائج المعروضة في الجدول، وبما أننا نبحث عن القيم الصغرى المحلية Local Minimum والقيم العظمى المحلية Local Maximum باستخدام الطريقة المقترحة وطريقة Sen لذا نبحث في النتائج عن القيم العظمى لدالة الهدف Z. ففي المثال (1) تكاد تكون النتائج متقاربة في حين أن النتائج العددية لباقي الأمثلة تبين كفاءة الطريقة المقترحة على طريقة Sen بالحصول على قيم عظمى لدالة الهدف Z.

المصادر

١) د.محمد أحمد العش ود.محمد عبد الرحمن أبو عمة، (1990): البرمجة الخطية، المملكة العربية السعودية، جامعة الملك سعود، الطبعة الأولى.

2) Artem, V. B.; Dragan, A. S. and Goldfrey, A. W., (2004): Multi-objective optimization for water.

3) Bunday, B. D., (1984): Basic Linear Programming; Edward Arnold, London.

4) Hama-Amain, O. A., (2008): An Adaptive Average Transformation Technique for Solving MOLPP; M.Sc. thesis, Koya University, Iraq.

5) Sen, Chandra, (1983): A new approach objective planning. The Indian Economic Journal, Vol.(30), pp. 91-96.

6) Sulaiman, N. A. and Hama-Amain, O. A., (2008): Optimal transformation technique to solve multi-objective linear programming problem (MOLPP); Journal of Kirkuk University-Scientific Studies, Vol.(3), No.(2), pp. 96-106.

7) Sulaiman, N. A. and Sadiq, Gulnar, W., (2006): Solving the multi-objective programming problem; using mean and median value, Al-Rafidain J. of Sci., Mosul, Iraq, Vol.(3), No.(1), pp. 69-83.