تأثير الأسطح على حركة فقاعات طويلة في القنوات المفتوحة بصورة مائلة

خضر محمد صالح خضر **زينة طلال**

قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسوب والرياضيات

جامعة الموصل

الاستلام **القبول**

2011 / 10 / 25 **2012 / 01 / 08**

Abstract

This research aims at studying the stable flow of the viscous thin membranes in a two-dimensional system in a declined way, neglecting the inertia powers. The equation that controls the flow was found by means of using the continuity equation and the motion equations of Navier-Stokes.

الملخص

يهدف البحث إلى دراسة الجريان المستقر لطبقة من ألأغشية الرقيقة اللزجة في نظام ثنائي البعد وبصورة مائلة بإهمال قوى القصور الذاتي، وتم أيجاد المعادلة التي تحكم الجريان باستخدام معادلة الاستمرارية ومعادلات الحركة لنافير–ستوكس.

المقدمة: Introduction

إن الأغشية الرقيقة (Thin films) للسوائل تحدث على نحو واسع في الطبيعة بضمن ذلك جريان الدم في الجسم، كذلك الطبقة الرقيقة المحيطة بقزحية العين والرئتين، ومن أنواع الأغشية الرقيقة الفقاعة (bubble) أو الرغوة (Foam) التي تتكون من الهواء وسائل لزج مع الشد السطحي، وان خواص واستقرارية هذه الأغشية تتعلق بسلوك وتركيبة عناصر الرغوة والتي هي أغشية السائل وحدود جيبس بلاتي (Gibbs Platean Borders) (GPB)، كما أن معدل تصريف الرغوة يمكن تحديده من خلال نحافة هذه الأغشية.

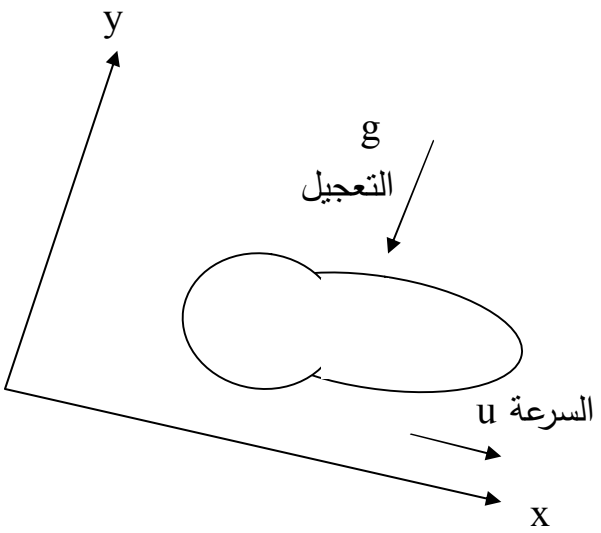
درس (Abdul Ahad, 1994) الشروط الديناميكية على سطوح الأغشية الرقيقة، كما درس (Morshed, 1996) الشروط الحدودية على سطوح الأغشية الرقيقة لجريان مستقر وغير مستقر عندما تكون لزوجة السائل صغيرة جدا.

وبحث كل من (S. A. Suslov & A.J. Roberts, 1998) الشروط الابتدائية لنموذج التزييت في جريان الأغشية الرقيقة للموائع.

درس (L.W. Schwartz & R.V. Roy, 1999) نمذجة جريان الطبقة الرقيقة مع تأثير انحدار الشد السطحي، كما درس (Leonard W. Schwartz, 2001) التحليل المحاذي في سياق التوتر لجريان الطبقة الرقيقة. ودرس (L. Kondic, 2002) عدم استقرار في الجاذبية لجريان الأغشية الرقيقة، كما درس (Khider, 2003) الجريان المستقر لهذه الأغشية على سطح مائل،كما درس (Prabir Daripa and Gelu Pasa,2010) حركة بطيئةَ مستقرة لفقاعةِ محدودةِ الطول لسائلٍ ذو لزوجةٍ صغيرةٍ جداً في الأنبوب الشعريٍ بصورة أفقية.

وفي دراستنا هذه تطرقنا إلى تأثير الأسطح على حركة هذه الأغشية ضمن شروط حدودية معينة.

النموذج الرياضي:-



شكل (1.1): يمثل نموذج الفقاعة على المستوي(x,y)

المعادلات التي تحكم الجريان: Governing Equations

ليكن $q = (u, v)$ يمثل متجه السرعة للجريان، وأن u, v تمثلان مركبتي السرعة في الاتجاهين x, y على الترتيب و P يمثل الضغط.

لتكن $y = h(x, t)$ معادلة السطح الحر للغشاء، حيث أن $h(x, t)$ يمثل سمك الغشاء.
نحصر اهتمامنا بالحالة التي يكون فيها $\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right] << 1$ على المجال x وبهذا يمكن إهمال الحد $\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]^2$ من معادلة الانحناء التي لها الصيغة الآتية:

$$K = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \ldots\ldots (1)$$

فتصبح بالصيغة الآتية:

$$K = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad \ldots\ldots (2)$$

أن المعادلات التي تحكم الجريان في نظام ثنائي البعد هي معادلة الاستمرارية والتي لها الصيغة الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

ومعادلات حفظ الزخم معادلات (نافير–ستوكس) في الاتجاهين y, x وعلى الترتيب:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \rho g_x \qquad \ldots\ldots (4)$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] + \rho g_y \qquad \ldots\ldots (5)$$

حيث أن ρ يمثل الكثافة، μ اللزوجة، g التعجيل الأرضي.

وباستخدام نظرية التزييت[1].

في النظرية الهايدروداينميكية (Hydrodynamic theory) للتزييت نفرض بان سمك الغشاء h يكون صغيرا جدا مقارنة مع طول الغشاء وليكن مثلاL . إن حد القصور الذاتي $u\frac{\partial u}{\partial x}$ صغير جدا مقارنة مع قوى اللزوجة وبهذا فأن قوى اللزوجة تكون مسيطرة تماما أي أن معادلتي الزخم (4) و (5) تختزلان إلى الصيغة الآتية:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \sin(\alpha) \qquad \ldots\ldots (6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos(\alpha) \qquad \ldots\ldots (7)$$

الشروط الحدودية: Boundary Conditions

1. شرط عدم الانزلاق: No-slip condition

$$u = 0 \quad at \quad y = 0 \qquad \text{.....(8)}$$

2. شرط الجهد العمودي: Normal – stress condition

$$P = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad at \quad y = h \qquad \text{.....(9)}$$

حيث σ الشد السطحي.

3. شرط جهد القص: (Tangential stress conditions)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad at \quad y = h \qquad \text{.....(10)}$$

حيث $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ انحدار الشد السطحي.

العمليات الرياضية:

نكامل المعادلة (6) بالنسبة لـ y :

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} y - \rho g \sin(\alpha) y + A \qquad \text{..... (11)}$$

حيث أن A يمثل ثابت التكامل.

نستخدم المعادلة (10) فنحصل على:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} h - \rho g \sin(\alpha) h + A$$

أو

$$A = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} h + \rho g \sin(\alpha) h \qquad \text{.....(12)}$$

نعوض المعادلة (12) في المعادلة (11):

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} y - \rho g \sin(\alpha) y + \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} h + \rho g \sin(\alpha) h \qquad \text{.....(13)}$$

نكامل المعادلة (13) بالنسبة لـ y :

$$\mu u = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{y^2}{2} - \rho g \sin(\alpha) \frac{y^2}{2} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} y - \frac{\partial P}{\partial x} h y + \rho g \sin(\alpha) h y + B \text{....(14)}$$

حيث أن B يمثل ثابت التكامل.

نستخدم المعادلة (8) في المعادلة (14) فنحصل على:

$$B = 0 \qquad \text{..... (15)}$$

نعوض المعادلة (15) في (14) مع القسمة على μ :

$$u = \frac{\partial P}{\mu \partial x}\left(\frac{y^2}{2} - hy\right) + \frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)\left(hy - \frac{y^2}{2}\right) + \frac{\partial \sigma}{\mu \partial x} y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

∵ التصريف Q له الصيغة [8]:-

$$Q = \int_0^h u(y)dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

بتعويض المعادلة (16) في المعادلة (17) نحصل:

$$Q = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\int_0^h \left(\frac{y^2}{2} - hy\right)dy + \frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)\int_0^h \left(hy - \frac{y^2}{2}\right)dy + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \sigma}{\partial x}\int_0^h y\, dy$$

أو

$$Q = -\frac{1}{3\mu}\frac{\partial P}{\partial x}h^3 + \frac{\rho g}{3\mu}\sin(\alpha)h^3 + \frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

نشتق المعادلة (9) بالنسبة لـ x ونعوضها في المعادلة (18) فنحصل على:

$$Q = -\frac{h^3}{3\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) + \frac{\rho g}{3\mu}\sin(\alpha)h^3 + \frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

كحالة خاصة نفرض أن التصريف يقترب من الصفر $(Q \to 0)$ لان حركة الفقاعة بطيئة وصغيرة جدا يمكن إهمالها.

ألان نكامل المعادلة (19) بالنسبة لـ x فنحصل على:

$$\frac{\sigma}{3\mu}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}h^3 + \frac{\sigma}{2\mu}h^2 + \frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)h^3 x = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

حيث C ثابت التكامل.

المتغيرات اللابعدية: Non-dimensional

$$\left.\begin{aligned} x &= \mu^A \sigma^B \rho^D g^E . \xi \\ h(x) &= \mu^a \sigma^b \rho^d g^e f(\xi) \end{aligned}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

حيث أن:

$$A = a = 0, \quad B = b = \frac{1}{2}, \quad D = d = -\frac{1}{2}, \quad E = e = -\frac{1}{2}$$

بتعويض المعادلة (21) في المعادلة (20) نحصل على:-

$$\frac{\sigma^2}{3\mu\rho g}f^3 f'' + \frac{\sigma^2}{2\mu\rho g}f^2 + \frac{\sigma^2}{\mu\rho g}\xi f^3 \sin(\alpha) = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

نضرب المعادلة (22) في $\frac{\mu \rho g}{\sigma^2}$ فنحصل على:-

$$2f^3 f'' + 3f^2 + 3\xi f^3 \sin(\alpha) = C . \frac{\mu \rho g}{\sigma^2}$$

حيث أن الثابت C له البعد $\frac{\sigma^2}{\mu\rho g}$ فنحصل على:

$$2f^3 f'' + 3f^2 + 3\xi f^3 \sin(\alpha) = 1 \quad \text{.................................} \quad (23)$$

نقسم المعادلة (23) على $2f^3$:

$$f'' = \frac{1}{2f^3} - \frac{3}{2}.\frac{1}{f} - \frac{3\xi}{2}\sin(\alpha) \text{..} (24)a$$

ألان نأخذ الحالات الآتية:-

الحالة الأولى نفرض أن الزاوية $\alpha = 0$ وان $f \cong 1$ وبذلك فأن المعادلة (24)a تصبح بالصيغة :-

$$f'' = -1 \quad \text{..} (25)a$$

نكامل المعادلة $(25)a$ بالنسبة ξ نحصل على:

$$\mathrm{f} = \frac{-\xi^2}{2} + C\xi + C_1 \quad \text{..} \quad (26)a$$

وان حلول المعادلة (26)a مبين في الشكل (1.1).

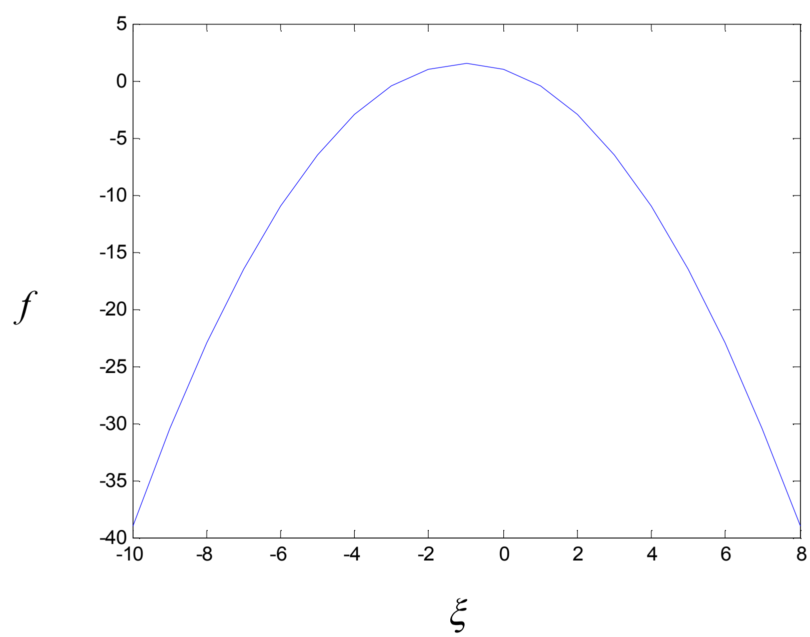
الحالة الثانية عندما الزاوية $\alpha \neq 0$ فان المعادلة (24)a تصبح بالصيغة:

$$f'' = -1 - \frac{3}{2}\xi \sin(\alpha) \quad \text{..} (25)b$$

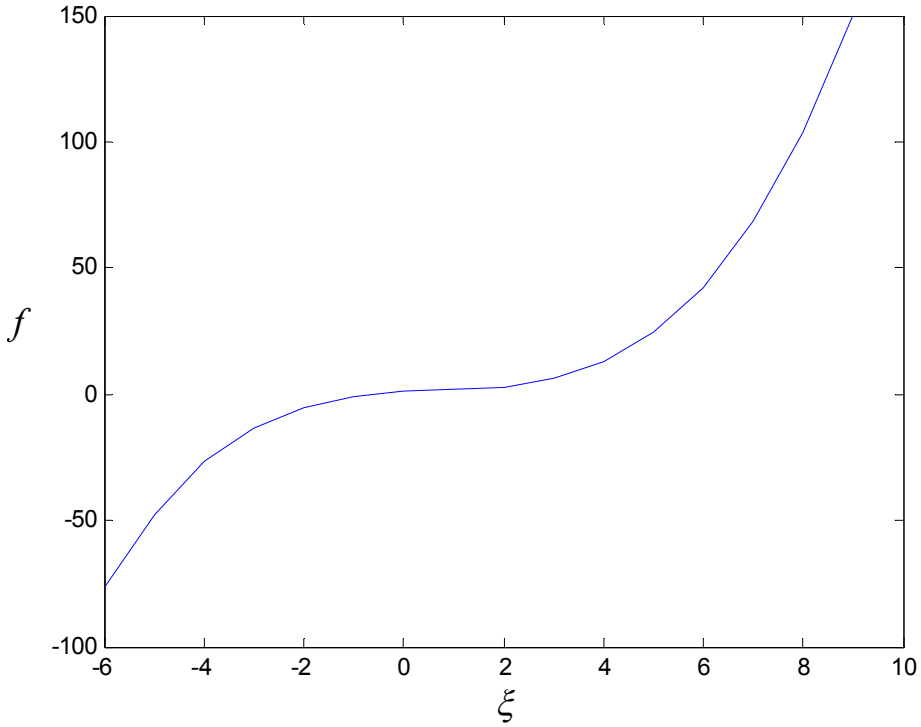
نكامل المعادلة(25)b مرتين بالنسبة ξ فنحصل على:

$$f(\xi) = -\frac{\xi^3}{4}\sin(\alpha) - \frac{\xi^2}{2} + C\xi + C_1 \quad \text{..............................} \quad (26)b$$

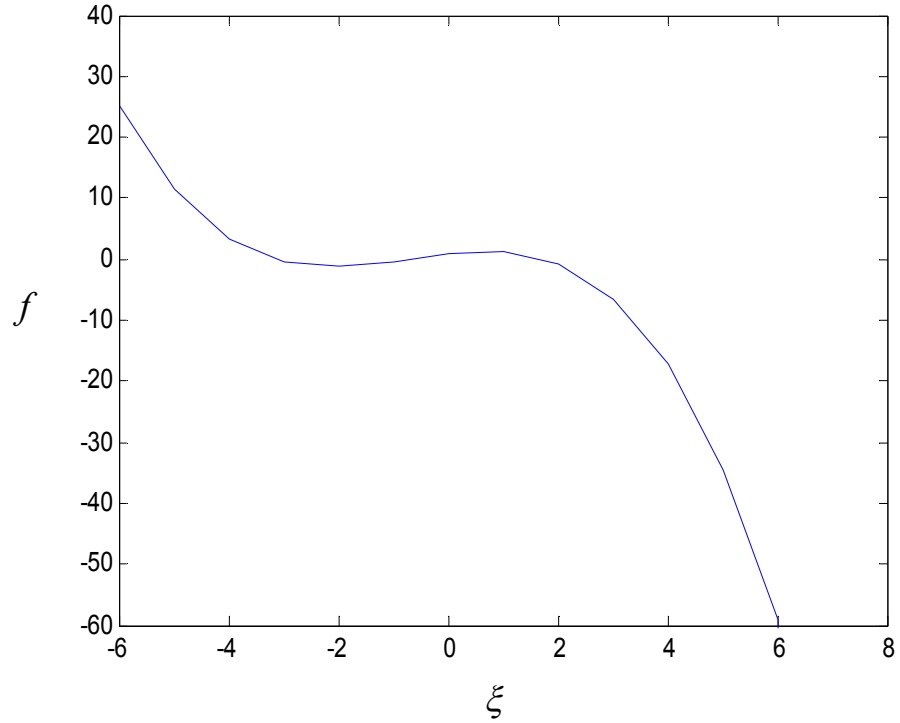
وان حلول المعادلة (26)b مبين في الشكلين (1.2) و(1.3).



شكل (1.1): يمثل منحني المعادلة a (26)



شكل(1.2): يمثل منحني المعادلة b (26), $\alpha = 30$



شكل(1.3): يمثل منحني المعادلة b (26) , $\alpha = 90$

الاستنتاجات:

من خلال دراستنا لحركة الجريان للموائع النيوتينية وبصورة مائلة تبين من حلول المعادلة a(26) بأن سمك الغشاء (f) يساوي الواحد عندما ($\xi = 0$) وتبدأ الغشاء بالنقصان كلما اقتربنا من ($\xi \to \pm \infty$). بينما من المعادلة b(26) تبين بأن سمك الغشاء يتأثر بوجود الزاوية α حيث أن سمك الغشاء يزداد وينقص بأخذ قيم مختلفة للزاوية α باتجاهي الموجب والسالب.

المصادر: **References**

1) ستريتر. فكتورل، بنيامين. ويلي، "ميكانيك الموائع"، ترجمة: نبيل زكي مرقص وفوزي ابراهيم، جامعة صلاح الدين، 1984.

2) Abdul Ahad, J. G., "Similarity solution for unsteady flow thin liquid films", J. Ed. SCI, Vol. 17, 1994.

3) Khider, M.S.Khider, "Viscous flow in certain inclined thin liquid films" M.Sc.thesis, University of Mosul 2003.

4) Leonard.W.Schwartz," On the asymptotic analysis of surface-stress-driven thin-layer flow", Journal of engineering mathematics 39:171-181, 2001.

5) L. Kondic "Instabilities in Gravity Driven Flow of Thin Fluid Films", SIAM Revew, Vol. 45,No.1.PP.95-115, 2003.

6) L.W. Schwartz and R.V. Roy "Modeling draining flow in mobile and immobile soap films" Journal of Colloid and interface Science 218,309-323 ,1999.

7) Morshed, A. M, "Fluid flow in thin liquid films", M. Sc, thesis University of Mosul, 1996.

8) Naseer.S.A.Ilyas "Viscous flow in some liquid films" M.Sc.thesis, University of Mosul, 2006.

9) Prabir Daripa and Gelu Pasa "The effect of surfactant on the motion of long bubbles in horizontal capillary tubes" Journal of Statistical Mechanics, L02002.2010

10) S.A.Suslov and A.J.Roberts "Proper initial conditions for the lubrication model of the flow of a thin film of fluid"ar Xivichao – dyn/9804018 Vol.8 Apr 1998.