وجود الحلول ووحدانيتها لنظام معين من المعادلات التفاضلية اللاخطية ذات الرتب الكسرية.

رعد نوري بطرس همسة داؤد سليم أزهار حسن سلو

قسم الرياضيات / كلية التربية/جامعة الموصل

الاستلام القبول

26/09/2006 04/04/2007

ABSTRACT

In this paper, we study an existence and uniqueness of the solutions for some nonlinear differential equations which has fractional order α, in the case $0<\alpha<1$, by using the picard approximation method .and through this study we obtained on many computation in the solutions of the existence and uniqueness theorems for the same fractional nonlinear differential equations. Further more this study development and extended the previous method , such that the solutions and computations which has been obtained became more general and universal.

الملخص

تناولنا في هذا البحث دراسة وجود الحلول ووحدانيتها لعدد من المعادلات التفاضلية اللاخطية ذات الرتب الكسرية α في الحالة $(0<\alpha<1)$, وذلك باستخدام مبرهنة بيكارد للتقريب .

(Picard Approximation Method). ومن خلال هذه الدراسة تم الحصول على عدد من النتائج في مبرهنات الوجود والوحدانية الحلول لتلك المعادلات التفاضلية اللاخطية الكسرية وكذلك تم من خلال هذه الدراسة تطوير الطريقة في أعلاه وتوسيعه ا بحيث أصبحت الحلول والنتائج التي حصلنا عليها اكثر عمومية وشمولية من تلك الحلول التي يمكن الحصول عليها من خلال حلول المعادلات التفاضلية الاعتيادية.

البند الأول: المقدمة

ان العديد من النماذج الرياضية التي تصف كثيراً من الظواهر ال طبيعية في الفيزياء والهندسة وغيرها تكون معادلات تفاضلية او تكاملية اوتكاملية – تفاضلية ومن رتب كسرية.

وتقتضي دراسة منظومة من المعادلات التفاضلية الكسرية تطويراً لمفاهيم التفاضل والتكامل في الفضاءات الاتجاهية وتقتضي العديد من التطبيقات في الطبيعة تطوير هذ ه المفاهي

فضلاً عن المؤثرات التفاضلية الاتجاهية كا لانحدار والتشتت والتدوير وغيرها انظر [7], [9], [10]..

وبرهن كل من Al – Abedeen and Arora [1] و Al – Hayani [2] وجود الحل و وحدانيته للمعادلة

$$y^{(\alpha)}(x)=f(x,y) \qquad , \qquad \alpha>1$$
$$y^{(\alpha-i)}(a)=c_i \qquad c_i\in R\ ,\ i=1,2,3,.....$$

وذلك باستخدام طريقة بيكارد للتقريب المتعاقب ومبرهنة شاودر للنقطة الثابتة المعطاة في المرجع Huston [8] وهكذا توالت الدراسات والبحوث في هذا المجال كما في [4], [6].

أما عملنا فهو دراسة وجود الحل وحدانيته لنظام المعادلات التفاضلية اللاخطية ومن الشكل في أدناه

$$\left.\begin{array}{l} x^{(\alpha)}(t)=f(t,x,y) \\ x^{(\alpha-1)}(0)=a_1 \\ \\ y^{(\alpha)}(t)=g(t,x,y) \\ y^{(\alpha-1)}(0)=b_1 \end{array}\right\} \qquad .....(1)$$

اذ ان الدالتين المتجهتين $f(t,x,y)$ و $g(t,x,y)$ معرفتان ومستمرتان في المجال G_α المعرف كالاتي:

$$G_\alpha=\{t,x,y:(t,x,y)\in[0,h]\times D_1\times D_2\} \qquad .....(2)$$

إذ أن D_1, D_2 مجالان مغلقان ومحددان في المجال الحقيقي R .نفرض ان كل من الدالتين $f(t,x,y)$ و $g(t,x,y)$ تحققان المتباينات الآتية:

$$\|f(t,x,y)\|\le M \qquad , \qquad \|g(t,x,y)\|\le N \qquad .....(3)$$

$$\|f(t,x_2,y_2)-f(t,x_1,y_1)\|\le K\left(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\right) \qquad .....(4)$$

$$\|g(t,x_2,y_2)-g(t,x_1,y_1)\|\le L\left(\|x_2-x_1\|+\|y_2-y_1\|\right) \qquad .....(5)$$

لكل $x_1, x_2 \in D_1$, $y_1, y_2 \in D_2$ و $t \in [0,h]$ وكل من L_2, L_1, K_2, K_1, N, M هي ثوابت موجبة , $\|.\| = \max_{x\in D_1, y\in D_2}$, نعرف المجموعة غير الخالية بما يأتي:-

$$\left.\begin{aligned} D_{1\alpha} &= D_1 - \frac{Mh^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ D_{2\alpha} &= D_2 - \frac{Nh^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

فضلاً عن ذلك نفترض ان القيمة الذاتية العظمى للمصفوفة

$$\Lambda_{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \frac{K t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{K t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{L t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{L t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{pmatrix}$$

اقل من الوحدة , أي ان

$$\lambda_{\alpha\ \max} = \left[\frac{K h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

تعريف 1:

نقول عن الدالة f بانها تحقق شرط لبشتز على المجال $D \subset R$, اذا وجد عدد موجب K بحيث ان المتباينة الآتية:

$$\| f(t, x_2, y_2) - f(t, x_1, y_1) \| \le K\left(\| x_2 - x_1 \| + \| y_2 - y_1 \| \right) \qquad , K > 0.$$

متحققة لكل $t \in R,\ x_1, x_2\ y_1,\ y_2 \in D$.

تعريف 2:

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من الدوال المعرفة على الفترة I . يقال ان المتتابعة $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ مقيدة بانتظام (Uniformly bounded) على I اذا كان في الامكان ايجاد عدد غير سالب M بحيث ان لكل x في I , فان $|f_n(x)| < M$, $n \ge 1$.

تعريف 3:

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من الدوال المعرفة على الفترة E . يقال بان المتتابعة $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة للدالة E إذا كان لكل $x \in E$, $\varepsilon > 0$ عدد صحيح m_0 (يعتمد بصورة عامة على كل من x, ε) بحيث أن $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $(n \in N, n \ge m_0)$.

تعريف 4:

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من الدوال المعرفة على الفترة E . يقال بان ا لمتتابعة $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة بصورة منتظمة (Converges Uniformly) للدالة fعلى E اذا كان لكل $\varepsilon > 0$, $x \in E$ يوجد عدد صحيح m_0 (يعتمد على ε ولا يعتمد على x) بحيث ان $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $(n \geq m_0, x \in E)$.

تعريف 5:

إذا كانت $\alpha > 0$ فأن دالة كاما التي يرمز لها بالرمز Γ تعرف بالشكل الأتي

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

بشرط التكامل موجود.

تعريف 6:

إذا كانت الدالة f قابلة للقياس في مفهوم ليبيك ومعرفة دائماً تقريباً على الفترة $[a,b]$ و $\alpha > 0$ فإننا نعرف

$${}_a^b I^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

بشرط أن يكون التكامل موجوداً.

تعريف 7:

اذا كانت $\alpha \in R$ وكانت الدالة f معرفة دائماً تقريباُ (Almost every where) على $[a,b]$ فاننا نعرف

$$f^{(\alpha)}(t) = I_a^{t\,-\alpha} f$$

بشرط ان يكون التكامل موجوداً لكل $t \in [a,b]$.

ملاحظة (1): وفيما يخص التعاريف و المأخوذات انظر [3],[5], [11] .

البند الثاني:-

سندرس في هذا البند وجود الحلول وو حدانيتها لنظام من المعادلات التفاضلية الكسرية (1) وذلك باستخدام طريقة بيكارد للتقريب.

أولا : مبرهنة الوجود 1

لتكن كل من الدالتين $f(t,x,y)$ و $g(t,x,y)$ في نظام المعادلات التفاضلية اللاخطية (1) معرفتين وم ستمرتين في المجال G_α ولتكن المتباينات (3) إلى (5) متحققة وعندئذٍ تصبح الدالة $\begin{pmatrix} x(t,x_0,y_0) \\ y(t,x_0,y_0) \end{pmatrix}$ المعرفة في أدناه:-

$$x(t,x_0,y_0)=\frac{a_1(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f\left(s,x(s,x_0,y_0),y(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \qquad .....(8)$$

$$y(t,x_0\ y_0)=\frac{b_1(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g\left(s,x(s,x_0,y_0),y(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \qquad .....(9)$$

حلاً لنظام المعادلات التفاضلية اللاخطية الكسرية (1).

البرهان:-

لتكن $\{x_m(t,x_0,y_0)\}_{m=0}^{\infty}$ و $\{y_m(t,x_0,y_0)\}_{m=0}^{\infty}$ متتابعات من الدوال المعرفة على الفترة $[0,h]$ وعلى النحو الأتي:-

$$x_m(t,x_0,y_0)=\frac{a_1(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f\left(s,x_{m-1}(s,x_0,y_0),y_{m-1}(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \qquad .....(10)$$

$$x^{(\alpha-1)}(0)=a_1$$

$$y_m(t,x_0,y_0)=\frac{b_1(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g\left(s,x_{m-1}(s,x_0,y_0),y_{m-1}(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \qquad .....(11)$$

$$y^{(\alpha-1)}(0)=b_1$$

ونظراً لطول البرهان يفضل تجزئته كما ياتي :-

i. $x_m(t,x_0,y_0)\in D_1$ و $y_m(t,x_0,y_0)\in D_2$ لكل $t\in[0,h]$, $y_0\in D_{2\alpha}$, $x_0\in D_{1\alpha}$

ii. المتتابعات $x_m(t,x_0,y_0)\in D_2$ و $y_m(t,x_0,y_0)\in D_2$ متقاربة بانتظام للدوال $x(t,x_0,y_0)$ و $y(t,x_0,y_0)$ على الفترة $[0,h]$ لكل $y_0\in D_{2\alpha}$, $x_0\in D_{1\alpha}$.

iii. $x(t,x_0,y_0)\in D_1$ و $y(t,x_0,y_0)\in D_2$ لكل $t\in[0,h]$, $y_0\in D_{2\alpha}$, $x_0\in D_{1\alpha}$.

برهان (i):

بتامل متتابعات الدوال

$x_1(t,x_0,y_0)$, $x_2(t,x_0,y_0)$, ,.....,$x_m(t,x_0,y_0)$ المعرفة في العلاقة (10)

وكذلك $y_1(t,x_0,y_0)$, $y_2(t,x_0,y_0)$, ,.....,$y_m(t,x_0,y_0)$ المعرفة في العلاقة (11) نجد أن كل متتابعات الدوال مستمرة عند t . ونفرض أن

$x_0(t)=\dfrac{a_1(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ و $y_0(t)=\dfrac{b_1(t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

باستخدام الاستقراء الرياضي ومن العلاقة (10) و (11) عندما $m=1$ نحصل على:-

$$\left\| x_1(t,x_0,y_0)-x_0 \right\| = \left\| x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(s,x_0(s,x_0,y_0),y_0(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds - x_0 \right\|$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left\| f(s,x_0(s,x_0,y_0),y_0(s,x_0,y_0)) \right\| (t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}$$

$$\left\| x_1(t,x_0,y_0)-x_0 \right\| \le \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}h^{\alpha} \qquad , \qquad t\in[0,h]$$

إذن $x_1(t,x_0,y_0)\in D_1$ لكل $x_0\in D_{1\alpha}$.

$$\left\| y_1(t,x_0,y_0)-y_0 \right\| = \left\| y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(s,x_0(s,x_0,y_0),y_0(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds - y_0 \right\|$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left\| g(s,x_0(s,x_0,y_0),y_0(s,x_0,y_0)) \right\| (t-s)^{\alpha-1}$$

$$\le \frac{N}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{N}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}$$

$$\left\| y_1(t,x_0,y_0)-y_0 \right\| \le \frac{N}{\Gamma(\alpha+1)}h^{\alpha} \qquad , \qquad t\in[0,h]$$

إذن $y_1(t)\in D_2$ لكل $y_0\in D_{2\alpha}$.

وبافتراض ان $x_p(t,x_0,y_0)\in D_1$ و $y_p(t,x_0,y_0)\in D_2$ لكل $x_0\in D_{1\alpha}$ و $p\in Z^+,\ y_0\in D_{2\alpha}$.

وبذلك عندما $m=p+1$ نجد ان :

$$\left\| x_{p+1}(t,x_0,y_0)-x_0 \right\| = \left\| x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f\big(s,x_p(s,x_0,y_0),y_p(s,x_0,y_0)\big)(t-s)^{\alpha-1}ds-x_0 \right\|$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left\| f\big(s,x_p(s,x_0,y_0),y_p(s,x_0,y_0)\big)\right\|(t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}$$

$$\left\| x_{p+1}(t,x_0,y_0)-x_0 \right\| \le \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}h^{\alpha} \qquad , \qquad t\in[0,h]$$

إذن $x_p(t)\in D_1$ لكل $x_0\in D_{1\alpha}$.

$$\left\| y_{p+1}(t,x_0,y_0)-y_0 \right\| = \left\| y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g\big(s,x_p(s,x_0,y_0),y_p(s,x_0,y_0)\big)(t-s)^{\alpha-1}ds-y_0 \right\|$$

وبنفس الطريقة

$$\left\| y_{p+1}(t,x_0y_0)-y_0 \right\| \le \frac{N}{\Gamma(\alpha+1)}h^{\alpha} \qquad , \qquad t\in[0,h]$$

إذن $y_{p+1}(t)\in D_2$ لكل $y_0\in D_{2\alpha}$.

وبذلك نستنتج ومن خلال الاستقراء الرياضي بان

$$x_m(t,x_0,y_0)\in D_1\ ,\ \forall x_0\in D_{1\alpha}\ ,\quad t\in[0,h]$$
$$y_m(t,x_0,y_0)\in D_2\ ,\ \forall y_0\in D_{2\alpha}\ ,\quad t\in[0,h]\ ,\quad m=0,1,2,\ldots$$

<u>برهان (ii):</u>

يجب ان نبرهن ان متتابعات الدوال $\{x_m(t,x_0,y_0)\}_{m=0}^{\infty}$ و $\{y_m(t,x_0,y_0)\}_{m=0}^{\infty}$ متقاربة بانتظام الى $x(t,x_0,y_0)$, $y(t,x_0,y_0)$ على التوالي في المجال (2) وعلى الفترة $[0,h]$.

من متتابعة الدالتين(10) و (11) نجد ان

$$\| x_2(t,x_0,y_0)-x_1(t,x_0,y_0)\| = \Big\| x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(s,x_1(s,x_o,y_0),y_1(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds -$$

$$-x_0-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(s,x_0(s,x_0,y_0),y_0(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds\Big\|$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \Big\| f(s,x_1(s,x_0,y_0),y_1(s,x_0,y_0))-f(s,x_0(s,x_0,y_0),y_0(s,x_0,y_0))\Big\|(t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t K\left(\| x_1(s,x_0,y_0)-x_0(s,x_0,y_0)\|+\|y_1(s,x_0,y_0)-y_0(s,x_0,y_0)\|\right)(t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\left(\|x_1(t,x_0,y_0)-x_0(t,\ x_0,y_0)\|+\| y_1(t,x_0,y_0)-y_0(t,x_0,y_0)\|\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{K\,t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\| x_1(t,x_0,y_0)-x_0(t,x_0,y_0)\|+\| y_1(t,x_0,y_0)-y_0(t,x_0,y_0)\|\right)$$

$$\| x_2(t,x_0,y_0)-x_1(t,x_0,y_0)\| \le \frac{K\,t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\| x_1(t,x_0,y_0)-x_0(t,x_0,y_0)\|+\| y_1(t,x_0,y_0)-y_0(t,x_0,y_0)\|\right)$$

كذلك

$$\| y_2(t,x_0,y_0)-y_1(t,x_0,y_0)\| = \Big\| y_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(s,x_1(s,x_o,y_0),y_1(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds -$$

$$-y_0-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(s,x_0(s,x_0,y_0),y_0(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds\Big\|$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \Big\| g(s,x_1(s,x_0,y_0),y_1(s,x_0,y_0))-g(s,x_0(s,x_0,y_0),y_0(s,x_0,y_0))\Big\|(t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t L\ \left(\| x_1(s,x_0,y_0)-x_0(s,x_0,y_0)\|+\|y_1(s,x_0,y_0)-y_0(s,x_0,y_0)\|\right)(t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left(\|x_1(t,x_0,y_0)-x_0(t,\ x_0,y_0)\|+\| y_1(t,x_0,y_0)-y_0(t,x_0,y_0)\|\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{L\,t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\| x_1(t,x_0,y_0)-x_0(t,x_0,y_0)\|+\| y_1(t,x_0,y_0)-y_0(t,x_0,y_0)\|\right)$$

إذن

$$\left\| x_{m+1}(t,x_0,y_0)-x_m(t,x_0,y_0)\right\| \le \frac{Kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\| x_m(t,x_0,y_0)-x_{m-1}(t,x_0,y_0)\right\| + \frac{Kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\| y_m(t,x_0,y_0)-y_{m-1}(t,x_0,y_0)\right\| \quad .....(12)$$

$$\left\| y_{m+1}(t,x_0,y_0)-y_m(t,x_0,y_0)\right\| \le \frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\| x_m(t,x_0,y_0)-x_{m-1}(t,x_0,y_0)\right\| + \frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\| y_m(t,x_0,y_0)-y_{m-1}(t,x_0,y_0)\right\| \quad .....(13)$$

نعيد كتابة المتباينتين (12) و (13) بشكل متجهات وعلى النحو الأتي:-

$$\begin{pmatrix} \left\| x_{m+1}(t,x_0,y_0)-x_m(t,x_0,y_0)\right\| \\ \left\| y_{m+1}(t,x_0y_0)-y_m(t,x_0,y_0)\right\| \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \frac{Kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{Kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\| x_m(t,x_0,y_0)-x_{m-1}(t,x_0,y_0)\right\| \\ \left\| y_m(t,x_0,y_0)-y_{m-1}(t,x_0,y_0)\right\| \end{pmatrix}$$

$$V_{(m+1)_{\alpha}}(t,x_0y_0) \le \Lambda_{\alpha}(t)\ V_{m\alpha}(t,x_0,y_0) \quad .....(14)$$

إذ أن

$$V_{(m+1)\alpha}(t,x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \left\| x_{m+1}(t,x_0y_0)-x_m(t,x_0,y_0)\right\| \\ \left\| y_{m+1}(t,x_0,y_0)-y_m(t,x_0,y_0)\right\| \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \frac{Kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{Kt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{pmatrix} \quad .....(15)$$

$$V_{m\alpha}(t,x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \left\| x_m(t,x_0,y_0)-x_{m-1}(t,x_0,y_0)\right\| \\ \left\| y_m(t,x_0,y_0)-y_{m-1}(t,x_0,y_0)\right\| \end{pmatrix}$$

وهذا يودي ومن المتباينة (14) إلى أن

$$V_{(m+1)\alpha}(t) \le \Lambda_{0\alpha}\ V_{m\alpha}(t) \quad .....(16)$$

$$\Lambda_{0\alpha} = \max_{t\in[0,h]} \Lambda_{\alpha}(t)$$

ولكي نبرهن بان المتتابعتين (10) و (11) متقاربتان بانتظام يجب ان نجد القيم الذاتية للمصفوفة (15) وكما ياتي:

$$\begin{vmatrix} \frac{K h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \lambda_{\alpha} & \frac{K h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \lambda_{\alpha} \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{K h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \lambda_{\alpha} \right) \left(\frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \lambda_{\alpha} \right) - \frac{K L h^{2\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2} = 0$$

$$\frac{K L h^{2\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2} - \frac{\lambda_{\alpha} L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\lambda_{\alpha} K h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \lambda_{\alpha}^2 - \frac{K L h^{2\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2} = 0$$

$$\lambda_{\alpha}^2 - \left(\frac{K h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \lambda_{\alpha} = 0$$

$$\lambda_{\alpha} \left[\lambda_{\alpha} - \left(\frac{K h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right] = 0$$

اذن قيم λ_{α} هي كالاتي

$$\lambda_{\alpha 1} = 0 \quad \text{or} \quad \lambda_{\alpha 2} = \frac{K h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

وبتكرار المتباينة (16) نحصل على

$$V_{(m+1)\alpha} \le \Lambda_{0\alpha}^{m} \; V_{0\alpha} \quad , \qquad V_{0\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{M h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{N h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{pmatrix} \qquad \text{.....(17)}$$

وهذا يقود الى الحصول على التقدير

$$\sum_{i=1}^{m} V_{i\alpha} \le \sum_{i=1}^{m} \Lambda_{0\alpha}{}^{i-1} \; V_{0\alpha} \qquad \text{.....(18)}$$

وبما ان المصفوفة $\Lambda_{0\alpha}$ لها القيمة الذاتية العظمى

$$\lambda_{\alpha\max}(\Lambda_{0\alpha}) = \left[\frac{K h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right] < 1$$

وحسب العلاقة (7) نجد ان

المتتابعتين (10) , (11) متقاربتان بانتظام للدالتين المفترضتين $y(t,x_0,y_0), x(t,x_0,y_0)$

أي ان :

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,x_0,y_0) = x(t,x_0,y_0)$$
$$\lim_{m\to\infty} y_m(t,x_0,y_0) = y(t,x_0,y_0)$$

<u>برهان (iii):</u>

لإثبات إن $x(t,x_0,y_0)\in D_1$ و $y(t,x_0,y_0)\in D_2$ سنثبت أن

$$\lim_{m\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(s,x_m(s,x_0,y_0),y_m(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(s,x_m(s,x_0,y_0),y_m(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(s,x(s,x_0,y_0),y(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(s,x(s,x_0,y_0),y(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(s,x_m(s,x_0,y_0),y_m(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(s,x(s,x_0,y_0),y(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds \right\|$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \| f(s,x_m(s,x_0,y_0),y_m(s,x_0,y_0)) - f(s,x(s,x_0,y_0),y(s,x_0,y_0)) \| (t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\left(\| x_m(t,x_0,y_0) - x(t,x_0,y_0)\| + \| y_m(t,x_0,y_0) - y(t,x_0,y_0)\|\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\le \frac{K t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\| x_m(t,x_0,y_0) - x(t,x_0,y_0)\| + \| y_m(t,x_0,y_0) - y(t,x_0,y_0)\|\right)$$

وكذلك وبنفس الطريقة

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(s,x_m(s,x_0,y_0),y_m(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g(s,x(s,x_0,y_0),y(s,x_0,y_0))(t-s)^{\alpha-1}ds \right\|$$

$$\le \frac{L t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\| x_m(t,x_0,y_0) - x(t,x_0,y_0)\| + \| y_m(t,x_0,y_0) - y(t,x_0,y_0)\|\right)$$

وبما ان المتتابعات $\{x_m(t,x_0,y_0)\}_{m=0}^{\infty}$ و $\{y_m(t,x_0,y_0)\}_{m=0}^{\infty}$ تقترب بانتظام من الدوال $x(t,x_0,y_0)$, $y(t,x_0,y_0)$ على التوالي وعلى الفترة $[0,h]$.

إذن

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f\left(s, x_m(s,x_0,y_0), y_m(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \xrightarrow{\text{unif.}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f\left(s, x(s,x_0,y_0), y(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g\left(s, x_m(s,x_0,y_0), y_m(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \xrightarrow{\text{unif.}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g\left(s, x(s,x_0,y_0), y(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds$$

أي ان

$$\lim_{m\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f\left(s, x_m(s,x_0,y_0), y_m(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g\left(s, x_m(s,x_0,y_0), y_m(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f\left(s, x(s,x_0,y_0), y(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g\left(s, x(s,x_0,y_0), y(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \end{pmatrix}$$

اذن $\begin{pmatrix} x(t,x_0,y_0) \\ y(t,x_0,y_0) \end{pmatrix}$ تمثل حلاً لنظام المعادلات التفاضلية اللاخطية الكسرية (1) .

ثانياً : مبرهنة الوحدانية 2

إذا كانت جميع شروط المبرهنة 1 وفرضياتها جميعا محققة فان الدالة $\begin{pmatrix} x(t,x_0,y_0) \\ y(t,x_0,y_0) \end{pmatrix}$ تعتبر الحل الوحيد للنظام الكسري (1) .

البرهان:-

نفرض أن الشكل في أدناه

$$\begin{pmatrix} p(t,x_0,y_0) \\ q(t,x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f\left(s, p(s,x_0,y_0), q(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \\ y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t g\left(s, p(s,x_0,y_0), q(s,x_0,y_0)\right)(t-s)^{\alpha-1}ds \end{pmatrix}$$

هو حل أخر للنظام الكسري (1) وعندئذٍ

$$\| x(t,x_0,y_0) - p(t,x_0,y_0)\| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \|f\left(s, x(s,x_0,y_0), y(s,x_0,y_0)\right) -$$

$$- f\left(s, p(s, x_0, y_0), q(s, x_0, y_0)\right)\| (t-s)^{\alpha-1} ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t K\left(\| x(s, x_0, y_0) - p(s, x_0, y_0)\| + \| y(s, x_0, y_0) - q(s, x_0, y_0)\|\right)(t-s)^{\alpha-1} ds$$

$$\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\left(\| x\ (t, x_0, y_0) - p(t, x_0, y_0)\| + \| y\ (t, x_0, y_0) - q(t, x_0, y_0)\|\right) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds$$

$$\leq \frac{K t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\| x\ (t, x_0, y_0) - p(t, x_0, y_0)\| + \| y\ (t, x_0, y_0) - q(t, x_0, y_0)\|\right)$$

$$\| x\ (t, x_0, y_0) - p(t, x_0, y_0)\| \leq \frac{K t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\| x\ (t, x_0, y_0) - p(t, x_0, y_0)\| + \| y\ (t, x_0, y_0) - q(t, x_0, y_0)\|\right) \quad .....(19)$$

وبنفس الطريقة نجد ان

$$\| y\ (t, x_0, y_0) - q(t, x_0, y_0)\| \leq \frac{L t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\| x\ (t, x_0, y_0) - p(t, x_0, y_0)\| + \| y\ (t, x_0, y_0) - q(t, x_0, y_0)\|\right) \quad .....(20)$$

من (19) و (20) نحصل على

$$\begin{pmatrix} \| x(t, x_0, y_0) - p(t, x_0, y_0)\| \\ \| y(t, x_0, y_0) - q(t, x_0, y_0)\| \end{pmatrix} \leq \Lambda_{0\alpha} \begin{pmatrix} \| x(t, x_0, y_0) - p(t, x_0, y_0)\| \\ \| y(t, x_0, y_0) - q(t, x_0, y_0)\| \end{pmatrix} \quad .....(21)$$

وبتكرار المتباينة (21) يكون لدينا

$$\begin{pmatrix} \| x(t, x_0, y_0) - p(t, x_0, y_0)\| \\ \| y(t, x_0, y_0) - q(t, x_0, y_0)\| \end{pmatrix} \leq \Lambda_{0\alpha}^{m} \begin{pmatrix} \| x(t, x_0, y_0) - p(t, x_0, y_0)\| \\ \| y(t, x_0, y_0) - q(t, x_0, y_0)\| \end{pmatrix} \quad .....(22)$$

ومن الشرط (7) نحصل على $\Lambda_0^m \to 0$ عندما $m \to \infty$ فيكون لدينا ومن المتباينة (22) ان $x(t, x_0, y_0) = p(t, x_0, y_0)$ و $y(t, x_0, y_0) = q(t, x_0, y_0)$ بمعنى أن الحل $\begin{pmatrix} x(t, x_0, y_0) \\ y(t, x_0, y_0) \end{pmatrix}$ هو الحل الوحيد للنظام الكسري (1) .

REFERENCES

1. Al-Abdeen, A. Z., and Arora, H.L., Canad .Math-Bull.21, 267-271 (1978).
2. Al-Hayani, W.M. Thesis M.Sc. Iraq, Mosul University, (1988).
3. ِِِA postol, T.M .A., Institute of Technology, Addison – Wesley, California (1965).
4. Bassam, M.A., Eurdie Reive and Aynewardte Mathematic (1965).
5. Butris, R.N., Thesis M.Sc. Iraq, Mosul University, (1984).
6. Diethelm K., Ford N., Appl. Math &Comput (2003).
7. Hartley, T. C., Lorenzo., NASA/TP-208919 , (1999).
8. Huston, V., and Pym, J.S., Academic press, Toronto, (1980).
9. Meerschaert M., J.Mortensen and H. Scheffler., Fract. Appl. Anal. 7,61-81 (2004).
10. Meerschaert M., J.Mortensen and H. Scheffler., Statistical and theoretical physics (2005).
11. Samko S. G., Kilpas A.A. and Marichev I., Gordon and Breach, Yverdon, (1993).