تطوير الطريقة الهجينة لحل مسائل القيم الحدودية في المعادلات التفاضلية الاعتيادية

بشير محمد صالح خلف الحيالي محمد عبد الرزاق محمد الطائي قسم علوم الحاسبات / كلية التربية / جامعة الموصل

الاستلام 2006/7/17

القبول 2007/4/4

Abstract

The purpose of this research is the development of a Hybrid Technique for solving Boundary Value Problems (BVPs) linear & non-linear in Ordinary Differential Equations (ODEs).

We display the hybrid method by using backward integration. In addition, we study the application of the hybrid method for solving BVPs with derivative boundary conditions. We used the hybrid method for solving BVPs from order third and fourth. And we ended discussion the results of the hybrid method by:

1 –Increasing the number of estimations for the unknown boundary condition.
2 -Decreasing the step size of the integration.
3 -Using accurate interpolation formulae.
4 -Using higher order integration methods.

Finally, we studied the stability and error control of the hybrid method.

الملخص

غرض هذا البحث تطوير طريقة هجينة جديدة أو أسلوب هجين جديد لحل مسائل القيم الحدودية الخطية وغير الخطية في المعادلات التفاضلية الاعتيادية .

وقد عرضنا الطريقة الهجينة باستخدام التكامل التراجعي لحل المعادلات التفاضلية (التكامل الرجعي) , فضلاً عن تطبيق الطريقة الهجينة على مسائل القيم الحدودية ذات الشروط الحدودية المشتقة (Derivative Boundary Conditions) واستخدمنا الطريقة الهجينة لحل مسائل القيم الحدودية من الرتبتين الثالثة والرابعة وتم مناقشة نتائج الطريقة الهجينة من خلال:

1- زيادة عدد التخمينات للشرط الحدودي المجهول.

2- تقليل خطوة التكامل العددي.

3- استخدام صيغ الاندراج الدقيقة.

4- اعتماد طرائق تكاملية ذات رتب عليا في البتر.

في النهاية درسنا خاصية الاستقرارية والسيطرة على الخطأ.

1. مقدمة عن مسائل القيم الحدودية

(Introduction about boundary value problems)

أن الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية يمكن أن تتوسع لحل نظام من المعادلات ذات الرتب العليا ولكنها مجهزة بالشروط الابتدائية عند نقطة النهاية نفسها للفترة [a,b] (end point) إما a أو b وهذا ما يسمى بمسألة قيمة ابتدائية (IVPs) ولكننا في هذا البحث سوف نفصل كيفية الحصول على الحل التقريبي لمسائل القيم الحدودية (BVPs) المعادلات التفاضلية بالشروط المفروضة عند نقاط مختلفة . ونلاحظ ذلك بوضوح في المسائل الفيزيائية حيث تعتمد الموقع أكثر من الزمن وفي اغلب الأحيان توصف المسألة الفيزيائية بمعادلة تفاضلية بالشروط المفروضة عند أكثر من نقطة ويتجسم ذلك في معادلة الجريان الحراري.[9]

تتضمن مسائل القيم الحدودية في هذا ال بحث المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية بالشكل الأتي:

$$y'' = f(x, y, y') \qquad a \le x \le b,\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \qquad \textbf{(1)}$$

وبنظرة عامة فأن مسائل القيم الحدودية يمكن أن يكون لها حل وحيد أو ليس لها حل أو لها عدد غير منتهٍ من الحلول كما موضح في الأمثلة الآتية:[5]

$y(0) = 0, y(\pi) = 0 \quad y'' = -y$ **ليس لها حل.**

$y(0) = 0, y(\pi) = B \quad y'' = -y$ **لها عدد غير منتهي من الحلول حيث** $y(x) = B\sin x$ **أن لثبت اختياري**

$y(0) = 0, y(1) = 0 \quad y'' = -y$ **لها حل وحيد** $\left(y(x) = 1 - \cos x - \frac{1-\cos 1}{\sin 1}\sin x\right)$.

والمبرهنة الآتية توضح الفرضيات الخاصة بالحصول على الحل الوحيد لمسائل القيم الحدودية.

مبرهنة (1)

إذا كانت الدالة f بالشكل $y'' = f(x, y, y'), a \le x \le b$ ذات شروط حدودية $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ مستمرة في المنطقة

$D = \{(x, y, y') : a \le x \le b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$ وان المشتقات الجزئية $\partial f / \partial y = f_y(x, y, y'), \partial f / \partial y' = f_{y'}(x, y, y')$ مستمرة على المنطقة D.

وإذا وجد ثابت مثل $M > 0$ لـ $f_y, f_{y'}$ يحقق

$$f_y(x, y, y') > 0 \text{ (i)} \qquad \forall (x, y, y') \in D$$

$$\forall (x, y, y') \in D \qquad \left|f_{y'}(x, y, y')\right| \le M \text{ (ii)}$$

فأن مسألة القيمة الحدودية (1) تمتلك حلاً وحيداً [15].

وهكذا فـلأن أكثر الطرائق شيوعاً لحل مسائل القيم الحدودية هي طريقة القذف (Shooting Method) ولكن فيها من الصعوبات ما تحول دون استخدام الطريقة لعدة أسباب و سنوضح ذلك في البند اللاحق هذه الأسباب.

2. صعوبات الاستقرارية بتطبيق طريقة القذف [12] :

Stability Difficulties with Implementation of Shooting Method:

إن جَوُهر طريقة القذف هو استبدال مسالة القيمة الحدودية بمسائل قيم ابتدائية , ثم إجراء التكامل عددياً ل تلك المسائل . إن القيم الناتجة من التكامل تُوَفق أو تُتَطابق (matched) مع الشروط الحدودية .

وهكذا فأن صعوبات الاستقرارية لطرائق التكامل العددي ستُوَرث بسهولة إلى حل مسألة القيمة الحدودية. معنى أن هناك قلقاً إضافياً من استخدام شروط ابتدائية غير صحيحة (وهذا واضح لأن القيم تخمينية ولذلك فهي تختلف عن القيم الحقيقة المضبوطة).

ولذلك فأن الحل قد يكون غير موجود لكل من $a \le x \le b$ وفي هذه الحالة لا نعرف كيف نصحح القيم المخمنة لأن التكرار في المسائل غير الخطية لا يمكن أن ينجز باستخدام طريقة نيوتن وذلك بسبب التقصير الموجود في الحصول على الحل المضبوط عند استخدام هذه الطريقة.

وهكذا فإذا كانت طريقة التكامل العددي من الطرائق وحيدة أو متعددة الخطوة فأن القيم المخمنة للشروط الابتدائية المجهولة قد تؤدي إلى عدم الاستقرارية المتأصلة وبذلك سوف تصبح الطريقة غير مستقرة : وأخيرا فأنَ عدم الاستقرارية المحتثة هي ناتجة ع ن الطرائق التكاملية فضلاً عن الخطأ المتأصل.

ولذلك فأن صعوبات الاستقرارية لطرائق القذف تظهر على نحو محدد عندما يحتوي حل المعادلة التفاضلية على شروط متزايدة بسرعة (تنمو وتضمحل بسرعة). وشرو ط الحل هي بالشكل ($e^{\lambda x}, \lambda > 0$) إذاً سوف يكون حل مسألة القيمة الابتدائية حساساً جداً لأي تغير صغير في القيم الابتدائية. فإذا كان لدينا نمو كبير في الحل للمعادلة التفاضلية ولا يوجد تلاشي (اضمحلال) فأن ذلك يعني المسألة صلبة (Stiff).

وللتخلص من هذه المعضلة الموجودة في طريقة القذف نستخدم الاندراج في تخمين القيم الحدودية المجهولة وذلك باستعمال الطريقة الهجينة.

3 . الطريقة الهجينة لحل مسائل القيم الحدودية[11]:

The hybrid method for solving boundary value problems:

لتكن لدينا مسألة قيم حدودية بالصيغة الآتية

$$y'' = f(x, y, y') \qquad a \le x \le b,\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \qquad \textbf{(1)}$$

وبتحويل المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى

$$y = y_1$$
$$y' = y_2$$

ينتج لدينا

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = f(x, y_1, y_2) \qquad y_1(a) = \alpha\ ,\ y_1(b) = \beta \qquad x \in (a,b) \qquad \textbf{(2)}$$

لحل النظام (2) في الفترة (a,b) نحتاج إلى قيمة $y_2(a)$ المجهولة. وللحصول على القيمة الحدودية المجهولة نتبع الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى : نفرض قيمة تخمينية s_0 لـ $y_2(a)$ ونحل النظام (2) باستخدام (اويلر, رنج – كوتا ,.....,الخ) لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات الخطوة $h, (h\rangle 0)$ في الفترة (a,b) فنحصل على $y_1(b) = m_0$.

الخطوة الثانية : بفرض قيمة تخمينية أخرى مختلفة s_1 لـ $y_2(a)$ وحل النظام (2)بالأسلوب نفسه في الخطوة الأولى نحصل على $y_1(b) = m_1$.

وهكذا إلى:

الخطوة n: فنفرض قيمة تخمينية أخرى مختلفة s_n لـ $y_2(a)$ نحصل على $y_1(b) = m_n$.

وهكذا نحصل على جدول البيانات الأتي :-

الجدول (1)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها

$s_i = y_2(a)$	s_0	s_1	s_2	.....	s_n
$m_i = y_1(b)$	m_0	m_1	m_2	.....	m_n

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج باستخدام إحدى الصيغ (نيوتن النسبية ,المحدد ,لاكرانج ,.....,الخ) يمكن إيجاد قيمة $y_2(a)$ التي تتوافق تبعاً لـ $y_1(b) = \beta$.

4. اختبار الطريقة الهجينة (Testing the hybrid method):

سوف نناقش في هذا البند اختبار الطريقة للمسائل الخطية وغير الخطية.

مثال (1) (مسألة خطية)

حل مسألة القيمة الحدودية $y'' = -y' + 2y$ ذات الشروط الحدودية $y(0)=1, y(1)=e$ (الحل المضبوط $y(x)=e^x$)؟

الحل:

بتحويل المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى

$$y = y_1$$
$$y' = y_2$$

ينتج لدينا

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -y_2 + 2y_1$$

$y_1(0)=1, y_1(1)=e$

لحل المسألة بال طريقة الهجينة نفرض القيم الآتية لـ $y_2(0): -1,0,1,2,3$ ونحل النظام باستخدام طريقة اويلر المطورة [3] لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h=0.25$ نحصل على الجدول الأتي:

الجدول (2)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (1)

$si = y_2(0)$	-1	0	1	2	3
$mi = y_1(1)$	0.926733	1.792845	2.658957	3.525069	4.391181

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج بلستخدام صيغة لاكرانج [2] وتعويض $y_1(1)=e$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(0)=1.06849556$ في حين أن الحل المضبوط هو $y_2(0)=1.0$ أي أن الخطأ هو $err=0.06849556$.

مثال (2) (مسألة غير خطية)

حل مسألة القيمة الحدودية $y'' = \frac{1}{2x^2}\left(y^3 - 2y^2\right)$ ذات الشروط الحدودية $y(1)=1, y(2)=\frac{4}{3}$ (الحل المضبوط $y(x)=\frac{2x}{x+1}$)؟

الحل:

بعد بتحويل المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى ينتج لدينا

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = \frac{1}{2x^2}\left(y_1{}^3 - 2y_1 2\right)$$
$$y_1(1)=1, y_1(2)=\frac{4}{3}$$

لحل المسألة بالطريقة الهجينة نفرض القيم الآتية لـ $y_2(1): -1,0,1,2,3$ ونحل النظام باستخدام طريقة اويلر المطورة لحل مسائل القيم الابتدائية ذات خطوة $h=0.25$ نحصل على الجدول الأتي:

الجدول (3)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (2)

$si = y_2(1)$	-1	0	1	2	3
$mi = y_1(2)$	-0.112889	0.843058	1.825446	2.887546	4.092262

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج بلستخدام صيغة لاكرانج [2] وتعويض $y_1(2)=\frac{3}{4}$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(1)=0.50573909$ في حين أن الحل المضبوط هو $y_2(1)=0.5$ أي أن الخطأ هو $err=0.00573909$.

مثال (3) (مسألة خطية)

حل مسألة القيمة الحدودية $y''=-xy'+3y+4.2x$ ذات الشروط الحدودية $y(0)=0, y(1)=1.9$ (الحل المضبوط $y(x)=x^3+0.9x$)؟

الحل:

بعد بتحويل المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى ينتج لدينا

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -xy_2 + 3y_1 + 4.2x$$
$$y_1(0)=0, y_1(1)=1.9$$

لحل المسألة بالطريقة الهجينة نفرض القيم الآتية لـ $y_2(0): -1,0,1,2,3$ ونحل النظام باستخدام طريقة اويلر المطورة لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h=0.25$.وبذلك نحصل على الجدول الأتي:

الجدول (4)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (3)

$si = y_2(0)$	-1	0	1	2	3
$mi = y_1(1)$	-0.667360	0.635038	1.937437	3.239836	4.542236

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج بلستخدام صيغة لاكرانج [2] وتعويض $y_1(1)=1.9$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(0)=0.97132438$ في حين ان الحل المضبوط هو $y_2(0)=0.9$ أي أن الخطأ هو $err=0.07132438$.

مثال (4) (مسألة غير خطية)

حل مسألة القيمة الحدودية $y''=y^3-yy'$ ذات الشروط الحدودية $y(1)=\frac{1}{2}, y(2)=\frac{1}{3}$

(الحل المضبوط $y(x)=\frac{1}{(x+1)}$)؟

الحل:

بعد بتحويل المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى ينتج لدينا

$$y_1'=y_2$$
$$y_2'=y_1^{\,3}-y_1y_2$$

$$y_1(1)=\frac{1}{2}, y_1(2)=\frac{1}{3}$$

لحل المسألة بالطريقة الهجينة ن فرض القيم الآتية لـ $y_2(1):-1,0,1,2,3$ ونحل النظام باستخدام طريقة اويلر المطورة لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h=0.25$ نحصل على الجدول الأتي:

الجدول (5)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (4)

$si=y_2(1)$	-1	0	1	2	3
$mi=y_1(2)$	-3.860071	0.554237	1.449006	2.466657	3.751514

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج بلستخدام صيغة لاكرانج وتعويض $y_1(2)=\frac{1}{3}$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(1)=-0.25372986$ في ح ين أن الحل المضبوط هو $y_2(1)=-0.25$ أي أن الخطأ هو $err=0.00372986$.

5. الطريقة الهجينة التراجعية لحل مسائل القيم الحدودية [11]:

The backward hybrid method for solving boundary value problems:

سوف نستخدم التكامل التراجعي لحل المعادلا ت التفاضلية في عملية تخمين القيمة الحدودية المجهولة $y_2(a)$ ابتدءاً من b إلى a ذات خطوة $-h,(h\rangle 0)$.

ليكن لدينا مسألة قيمة حدودية من الرتبة الثانية

$$y''=f(x,y,y') \qquad a\le x\le b,\ y(a)=\alpha, y(b)=\beta \qquad \textbf{(1)}$$

وبعد تحويل رتبة النظام (1) إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى ينتج لدينا

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = f(x, y_1, y_2) \qquad y_1(a) = \alpha \ , \ y_1(b) = \beta \qquad x \in (a,b) \quad \textbf{(2)}$$

لحل النظام (2) في الفترة (a,b) نحتاج إلى قيمة $y_2(a)$ المجهولة. وللحصول على القيمة المجهولة نتبع الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى : بفرض قيمة تخمينية r_0 لـ $y_2(b)$ وحل النظام (2) في الفترة (a,b) ذات خطوة سالبة $-h,(h\rangle 0)$ ابتداء من b إلى a نحصل على $y_1(a) = m_0$

الخطوة الثانية: بفرض r_1 لـ $y_2(b)$ نحصل على $y_1(a) = m_1$.

وهكذا إلى

الخطوة n: فبفوض r_n لـ $y_2(b)$ نحصل على $y_1(a) = m_n$.

وعليه نحصل على جدول البيانات الأتي:

الجدول (6)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها

$r_i = y_2(b)$	r_0	r_1	r_2	.....	r_n
$m_i = y_1(a)$	m_0	m_1	m_2	.....	m_n

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج باستخدام إحدى الصيغ (نيوتن النسبية ,المحدد ,لاكرانج ,.....,الخ) يمكن إيجاد قيمة $y_2(b)$ التي تتوافق تبعا لـ $y_1(a) = \alpha$. ثم نحل النظام (2) في الفترة (a,b) ذات خطوة سالبة $-h,(h\rangle 0)$ ابتداء من b إلى a بالشروط الابتدائية ($y_1(b) = \beta$,القيمة التي حصلنا عليها $= y_2(b)$) نحصل على قيمة $y_2(a)$ المجهولة.

6. اختبار الطريقة الهجينة التراجعية(Testing the backward hybrid method):

مثال (5) (مسألة غير خطية)

حل مسألة القيمة الحدودية $y'' = -y'^2$ ذات الشروط الحدودية $y(1) = 0, y(2) = \ln 2$ (الحل المضبوط$y(x) = \ln(x)$)؟

الحل:

بعد تحويل المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى ينتج لدينا

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -y_2^2$$
$$y_1(1) = 0, y_1(2) = \ln 2$$

لحل المسألة با لطريقة الهجينة التراجعية نفرض القيم الآتية لـ $y_2(2): -1.0,-0.5,0.0,0.5,1.0$ ونحل النظام باستخدام طريقة (رنج – كوتا التراجعية من المرتبة الرابعة)[4] لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h=-0.125$ ابتداء من 2 إلى 1.وبذلك نحصل على الجدول الأتي:

الجدول a(7)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (5)

$r_i = y_2(2)$	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
$mi = y_1(1)$	1.386290	1.098612	0.693147	0.000040	-3.637063

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج بلستخدام صيغة لاكرانج وتعويض $y_1(1)=0$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(2)=0.50002070$ وعند حل النظام في أعلاه باستخدام طريقة (رنج – كوتا التراجعية من المرتبة الرابعة) لحل مسائل القيم الابتدائية ذات $h=-0.125$ ابتداء من 2 إلى 1 بالشروط الابتدائية $(y_1(2)=\ln 2, y_2(2)=0.50002070)$ نحصل على $y_2(1)=1.00007990$ في حين أن الحل المضبوط هو $y_2(1)=1.0$ أي أن الخطأ هو $err=7.990\times10^{-5}$.

ولكن عند حل النظام في أعلاه باستخدام طريقة (رنج – كوتا التقدمية من المرتبة الرابعة) لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h=0.125$ وبفرض القيم لـ $y_2(1): -1.0,-0.5,0.0,0.5,1.0$ وإيجاد القيم المقابلة لها من $y_1(2)$ نحصل على جدول البيانات الأتي:

الجدول b(7)

$s_i = y_2(1)$	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
$m_i = y_1(2)$	-4.330210	-0.693142	0.00000	0.405464	0.693143

وعند عكس الجدول وإجراء الاندراج لـ $y_1(2)=\ln 2$ باستخدام صيغة لاكرانج وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(1)=1.00000832$ أي أن مقدار الخطأ $err=8.320\times10^{-6}$.

7. تطوير الطريقة الهجينة لحل مسائل القيم الحدودية ذات الشروط الحدودية المشتقة:

Developing the hybrid method for solving boundary value problems with derivative boundary conditions:

ل نكن لدينا مسألة قيم حدودية ذات شروط حدودية مشت قة بالصيغة التالية

$$y'' = f(x, y, y') \qquad x \in (a,b) \quad y'(a) = \gamma \ , \ y'(b) = \delta \qquad \textbf{(3)}$$

وبعد تحويل المسألة في أعلاه إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى ينتج لدينا

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2) \end{aligned} \qquad x \in (a,b) \quad y_2(a) = \gamma \ , \ y_2(b) = \delta \qquad \textbf{(4)}$$

لحل النظام (4) في الفترة (a,b) نحتاج إلى قيمة $y_1(a)$ المجهولة . وللحصول على القيمة الحدودية المجهولة نتبع الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى : بفرض قيمة تخمينية l_0 لـ $y_1(a)$ وحل النظام (4) في الفترة (a,b) ذات خطوة $(h\rangle 0), h$ نحصل على $y_2(b) = m_0$.

الخطوة الثانية: بفرض l_1 لـ $y_1(a)$ نحصل على $y_2(b) = m_1$.

وهكذا إلى:

الخطوة n: فبفرض l_n لـ $y_1(a)$ نحصل على $y_2(b) = m_n$.

وهكذا نحصل على جدول البيانات الأتي:

الجدول (8)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها

$l_i = y_1(a)$	l_0	l_1	l_2	.....	l_n
$m_i = y_2(b)$	m_0	m_1	m_2	.....	m_n

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج باستخدام إحدى الصيغ (نيوتن النسبية ,المحدد ,لاكرانج ,.....,الخ) يمكن إيجاد قيمة $y_1(a)$ التي تتوافق تبعا لـ $y_2(b) = \delta$.

8 . اختبار التطوير الجديد للطريقة الهجينة لحل مسائل القيم الحدودية ذات الشروط الحدودية المشتقة:

Testing the new developing for hybrid method for solving boundary value problems with derivative boundary conditions:

مثال (6) (مسألة خطية)

حل مسألة القيمة الحدودية $y'' = y + \frac{1}{2}x^2 - 1$ ذات الشروط الحدودية

المشتقة $y'(0) = 0.5, y'(1) = \frac{e}{2} - 1$ (الحل المضبوط $y(x) = \frac{1}{2}(e^x - x^2)$)؟

الحل:

بعد تحويل المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى ينتج لدينا

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_1 + \frac{1}{2}x^2 - 1$$

$$y_2(0) = 0.5, y_2(1) = \frac{e}{2} - 1$$

لحل المسألة بالتطوير الجديد للطريقة الهجينة نفرض القيم الآتية لـ $y_1(0): -1,0,1,2,3$ ونحل النظام باستخدام طريقة (رنج – كوتا من المرتبة الرابعة) ذات خطوة $h = 0.1$ نحصل على الجدول الأتي:

الجدول (9)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (6)

$li = y_1(0)$	-1	0	1	2	3
$mi = y_2(1)$	-1.403658	-0.228458	0.946741	2.121941	3.297141

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج بلستخدام صيغة لاكرانج وتعويض $y_2(1) = \frac{e}{2} - 1$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_1(0) = 0.49999956$ في حين أن الحل المضبوط هو $y_1(0) = 0.5$ أي أن الخطأ هو $err = 4.4 \times 10^{-7}$.

9. تحسين الطريقة الهجينة باستخدام تقانات مختلفة:

Improving the hybrid method by using different techniques:

سوف يتم في هذا البند تحسين النتائج التي حصلنا عليها في حل الأمثلة السابقة في البند (4) باستخدام التقنيات الآتية

9-1 استخدام طرائق تكاملية ذات رتب عليا (Using higher order integration methods).

لحل المثال (1) بالطريقة الهجينة نفرض القيم الآتية لـ $y_2(0): -1,0,1,2,3$ وباستخدام طرائق تكاملية عديدة(مثل رنج–كوتا ,ميلن ,ادم باشفورت) لحل المعادلات التفاضلية ذات خطوة $h=0.2$ نحصل على جدول البيانات الأتي:

الجدول a(10)

يبين تأثير الطرائق العددية لحل المثال (1) في عملية تخمين $y_2(a)$

$y_2(0)$ \ $y_1(1)$	اويلر المطورة[4]	ادم باشفورت[2]	ميلن[16]	رنج–كوتا[4]
-1	0.933544	1.002783	0.995958	0.996361
0	1.801025	1.859223	1.856985	1.857306
1	2.668506	2.715664	2.718013	2.718251
2	3.535986	3.572105	3.579040	3.579196
3	4.403467	4.428545	4.440068	4.440141

وعند استخدام صيغة لاكرانج وتعويض $y_1(1)=e$ وإيجاد القيم التي تتوافق معها نحصل على جدول البيانات الأتي:

الجدول b(10)

مقارنة الحل العددي بالحل المضبوط للمثال (1)

الطرائق العددية	الحل العددي لـ $y_2(0)$	الحل المضبوط ل $y_2(0)$	الخطأ
اويلر المطورة	1.05737977	1.00000000	0.05737977
ادم باشفورت	1.00305663	1.00000000	0.00305663
ميلن	1.00031221	1.00000000	0.00031221
رنج–كوتا	1.00003480	1.00000000	0.00003580

نلاحظ من الجدول السابق كيفية تأثير الطرائق العددية في الحصول على الحل العددي القريب من الحل المضبوط اذ يقل الخطأ عند استخدام طرائق ذات رتب عليا للبتر .ومن جهة أخرى يحسن تقليل الخطوة للحل في عملية تخمين $y_2(a)$ النتيجة على نحو واضح فعند مقارنة المثال (1) وعند استخدام طريقة اويلر المطورة لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h=0.25$ حصلنا على قيمة $y_2(0)=1.0684424$ أما عند حل المثال في البند 9-1 بطريقة اويلر المطورة لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات $h=0.2$ نحصل على $y_2(0)=1.05737977$ وبذلك نحصل على مقدار التحسن وهو 0.01106263 والبند الآتي يوضح ذلك التأثير.

2-9 تأثير حجم خطوة التكامل في أداء الطريقة.

The effect of step size of the integration for the method performance.

نعيد حل المثال (2) بالطريقة الهجينة اذ نفرض القيم الآتية لـ $y_2(1):-1,0,1,2,3$ وباستخدام طريقة (رنج–كوتا من المرتبة الرابعة)[4] لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات خطوة $h:0.5,0.25,0.125,0.05$ نحصل على جدول البيانات الأتي:

الجدول a(11)

يتضح فيه تأثير تقليل الخطوة للحل في عملية التخمين لـ $y_2(1)$

$y_2(1)$ \ $y_1(2)$	$h=0.5$	$h=0.25$	$h=0.125$	$h=0.05$
-1	-0.103235	-0.103121	-0.103112	-0.103111
0	0.849737	0.849901	0.849912	0.849913
1	1.830527	1.830385	1.830373	1.830372
2	2.896083	2.895819	2.895803	2.895802
3	4.115924	4.118433	4.118671	4.118689

وعند استخدام صيغة لاكرانج للاندراج وتعويض $y_1(2)=\frac{4}{3}$ وإيجاد القيم التي تتوافق تبعاً لها نحصل على جدول البيانات الأتي:

الجدول b(11)

مقارنة الحل العددي مع الحل المضبوط للمثال (2)

قيم الخطوة h	الحل العددي لـ $y_2(1)$	الحل المضبوط لـ $y_2(1)$	الخطأ
0.500	0.50011200	0.50000000	0.00011200
0.250	0.50007050	0.50000000	0.00007050
0.125	0.50006876	0.50000000	0.00006876
0.050	0.50006864	0.50000000	0.00006864

نلاحظ بصورة واضحة من الجدول في أعلاه وبوضوح العلاقة الطردية بين دقة الحل العددي والخطوة المستخدمة للحل في عملية التخمين . ونلاحظ كذلك وكما وضحنا سابقاً تأثير الطريقة العددية في عملية التخمين اذ عند حل المثال (2) بطريقة (اويلر المطورة لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات $h=0.25$) كان الخطأ هو $err=5.73909\times10^{-3}$ ولكن عند حل المسألة بطريقة (رنج – كوتا من المرتبة الرابعة لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات $h=0.25$) أصبح الخطأ اقل وهو $err=7.05\times10^{-5}$ والفرق في التحسن هو 5.66859×10^{-3}.

3-9 تحسين النتائج بزيادة عدد التخمينات للقيمة الحدودية المجهولة.

Improving the results by increasing the number of estimations for unknown boundary value.

ويتضح ذلك في حل المثال (3) بالطريقة الهجينة ولكن باستخدام طريقة (رنج–كوتا من المرتبة الرابعة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات $h=0.25$) وبفرض القيم التخمينية الآتية لـ $y_2(0):-1,0,1,2,3$ نحصل على جدول البيانات الأتي:

الجدول a(12)

حل المثال (3) باستخدام طريقة رنج – كوتا

$s_i=y_2(0)$	-1	0	1	2	3
$m_i=y_1(1)$	-0.633537	0.699610	2.0327589	3.365907	4.699055

وعند عكس الجدول وإجراء الاندراج باستخدام صيغة لاكرانج وتعويض $y_1(1)=1.9$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(0)=0.90041703665438$ أي أن مقدار الخطأ $err=4.1703665438\times10^{-4}$. نعيد حل المثال (3) باستخدام طريقة (رنج–كوتا من المرتبة الرابعة لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثانية ذات $h=0.25$) ولكن بزيادة عدد القيم التخمينية المفروضة لـ $y_2(0)$ اذ نستخدم القيم لـ $y_2(0):-1.0,-0.5,0.0,0.5,1.0,1.5,2.0,2.5,3.0$ نحصل على جدول البيانات الأتي:

جدول b(12)

حل المثال (3) مع زيادة عدد التخمينات

$s_i = y_2(0)$	$m_i = y_1(1)$
-1.0	-0.633537
-0.5	0.033036
0.0	0.699610
0.5	1.366184
1.0	2.032758
1.5	2.699332
2.0	3.365907
2.5	4.032481
3.0	4.699055

وبعكس الجدول في أعلاه وعند إجراء الاندراج باستخدام صيغة لاكرانج وتعويض $y_1(1)=1.9$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_2(0)=0.900417000012192$ أي أن مقدار الخطأ $err = 4.1700001292\times10^{-4}$ كما نلاحظ وجود علاقة عكسية بين الخطأ وزيادة عدد التخمينات ومن الواضح جداً أن زيادة عدد التخمينات لـ $y_2(0)$ من خمسة تخمينات إلى تسعة تخمينات أدت أن يكون التحسن ايجابياً نحو الحل المضبوطً وهو 2.553146×10^{-8} .

4-9 استخدام صيغ الاندراج الدقيقة.

Using accurate interpolation formulae.

سوف نوضح في هذا البند كيفية تأثير صيغ الاندراج في الحصول على قيمة $y_2(a)$ ففي المثال (4) حصلنا على الجدول (5) من حل القيم التخمينية لـ $y_2(1)$ وسوف نقوم بالاندراج لـ $\beta=(1/3)=y_1(2)$ وإيجاد القيم المقابلة لها باستخدام عدة صيغ للاندراجِ وبذلك نحصل على الجدول الأتي:

الجدول (13)

يبين تأثير صيغ الاندراج في الحصول على قيمة $y_2(1)$

$m_i = y_1(2)$	$s_i = y_2(1)$	صيغ الاندراج	قيم $y_2(1)$ العددية	قيم $y_2(1)$ المضبوطة	الخطأ
-3.860071	-1	صيغة لاكرانج [2]	-0.25372986	-0.2500000	0.00372986
0.554237	0	الشريحة [9]	-0.24807492	-0.2500000	0.00192508
1.449006	1	المحدد [1]	-0.25372986	-0.2500000	0.00372986
2.466657	2	نيوتن النسبي [10]	-0.25372986	-0.2500000	0.00372986
3.751514	3				

نلاحظ من الجدول في أعلاه أفضلية طريقة الشريحة (Spline)[9] للاندراج في عملية الحصول على تخمين مضبوط للقيمة الحدودية المجهولة.

10. استخدام الطريقة الهجينة لحل مسائل ذات رتب عليا:

Using the hybrid method for solving problems of higher order:

سوف نستخدم في هذا البند الطريقة الهجينة لحل مسائل من الرتبتين الثالثة والرابعة.

مثال (7) (مسألة غير خطية من الرتبة الثالثة)

حل مسألة القيمة الحدودية $y''' = -2y'y''$ ذات الشروط الحدودية

$y(1)=0, y'(1)=1, y(2)=\ln 2$ (الحل المضبوط $y(x)=\ln(x)$)؟

الحل:

بتحويل المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى

$$y = y_1$$
$$y' = y_2$$
$$y'' = y_3$$

ينتج لدينا

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$y_3' = -2y_2y_3$$

$$y_1(1)=0, y_1(2)=\ln 2$$
$$y_2(1)=1$$

لحل المسألة بالطريقة الهجينة نفرض القيم الآتية لـ $y_3(1): -1,0,1,2,3$ ونحل النظام باستخدام طريقة (رنج – كوتا من المرتبة الرابعة) [4] لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الثالثة ذات خطوة $h=0.1$ وبذلك نحصل على الجدول الأتي:

الجدول (14)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (7)

$pi = y_3(1)$	-1	0	1	2	3
$mi = y_1(2)$	0.693150	1.000000	1.265959	1.503011	1.718420

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج بلستخدام صيغة لاكرانج وتعويض $y_1(2)=\ln 2$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_3(1)=1.00000845$ في حين أن الحل المضبوط هو $y_3(1)=1.0$ أي أن الخطأ هو $err = 8.45\times10^{-6}$.

مثال (8) (مسألة خطية من الرتبة الرابعة)

حل مسألة القيمة الحدودية $y^{(4)} = 2y'' - y''' - x + \frac{1}{2}$ ذات الشروط الحدودي ة

$y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=1, y(1)=\frac{1}{12}+e$ (الحل المضبوط $y(x)=\frac{1}{12}x^3+e^x$)؟

الحل :

بتحويل المسألة إلى نظام من المعادلات من الرتبة الأولى

$$y = y_1$$
$$y' = y_2$$
$$y'' = y_3$$
$$y''' = y_4$$

ينتج لدينا

$$y_1' = y_2 \qquad y_1(0)=1, y_1(1)=\frac{1}{12}+e$$
$$y_2' = y_3 \qquad y_2(0)=1,$$
$$y_3' = y_4 \qquad y_3(0)=1$$
$$y_4' = 2y_3 - y_4 - x + \frac{1}{2}$$

لحل المسألة بالطريقة الهجينة نفرض القيم الآتية لـ $y_4(0): -1,0,1,2,3$ ونحل النظام باستخدام طريقة (رنج – كوتا من المرتبة الرابعة) لحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الرابعة ذات خطوة $h=0.1$ نحصل على الجدول الأتي:

الجدول (15)

القيم التخمينية والحلول المقابلة لها للمثال (8)

$pi = y_4(0)$	-1	0	1	2	3
$mi = y_1(1)$	2.439575	2.584390	2.728205	2.874020	3.018835

وعند عكس الجدول أعلاه وإجراء الاندراج بلستخدام صيغة لاكرانج وتعويض $y_1(1)=\frac{1}{12}+e$ وإيجاد القيمة المقابلة لها نحصل على $y_4(0)=1.50001838$ بينما الحل المضبوط هو $y_4(0)=1.5$ أي أن الخطأ هو $err=1.838\times10^{-5}$.

فإذا كان المثال السابق بالشروط الحدودية الآتية

$$y(0)=1, y'(0)=1, y(1)=\frac{1}{12}+e, y'(1)=\frac{1}{4}+e$$

فأن حل المثال بعد تخفيض النظام سوف يصبح بالشكل

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$y_3' = y_4$$
$$y_4' = 2y_3 - y_4 - x + \frac{1}{2}$$

$$y_1(0) = 1, \qquad y_1(1) = \frac{1}{12} + e$$
$$y_2(0) = 1, \qquad y_2(1) = \frac{1}{4} + e$$

ونفرض قيم اً تخمينية لكل من $y_3(0), y_4(0)$ ونحل النظام باستخدام طريقة (رنج – كوتا من الرتبة الرابعة) ولحل مسائل القيم الابتدائية من الرتبة الرابعة ذات خطوة $h = 0.05$ نحصل على الجدول الأتي:

جدول (16)

القيم التخمينية المفروضة لـ $y_3(0), y_4(0)$ والحلول المقابلة لها للمثال (8)

$y_3(0)$	$y_4(0)$	$y_1(1)$	$y_2(1)$
-1	**-1**	**1.292643**	**-0.682606**
-1	**0**	**1.437459**	**-0.253956**
-1	**1**	**1.582275**	**0.174693**
-1	**2**	**1.727091**	**0.603342**
-1	**3**	**1.871907**	**1.031992**
0	**-1**	**1.866109**	**0.607025**
0	**0**	**2.010925**	**1.035675**
0	**1**	**2.155741**	**1.464324**
0	**2**	**2.300557**	**1.892974**
0	**3**	**2.445373**	**2.321624**
1	**-1**	**2.439575**	**1.896657**
1	**0**	**2.584391**	**2.325306**
1	**1**	**2.729207**	**2.753956**
1	**2**	**2.874022**	**3.182606**
1	**3**	**3.018838**	**3.611256**
2	**-1**	**3.013040**	**3.186289**
2	**0**	**3.157856**	**3.614938**
2	**1**	**3.302672**	**4.043588**
2	**2**	**3.447488**	**4.472238**
2	**3**	**3.592304**	**4.900888**
3	**-1**	**3.586526**	**4.475920**
3	**0**	**3.731322**	**4.904570**
3	**1**	**3.876138**	**5.333220**
3	**2**	**4.020954**	**5.761870**
3	**3**	**4.165770**	**6.190520**

وعند عكس الجدول السابق وبجعل $y_1(1), y_2(1)$ أولاً ثم $y_3(0), y_4(0)$ ثانياً وإجراء الاندراج الثنائي البعد [3] وتعويض $y_1(1) = \frac{1}{4} + e, y_2(1) = \frac{1}{12} + e$ وإيجاد القيم المقابلة لها نحصل على $y_3(0) = 1.0000027711$ بينما الحل المضبوط هو $y_3(0) = 1.0$ أي أن الخطأ هو $err = 2.771 \times 10^{-6}$ و $y_4(0) = 1.499993592$ في حين أن الحل المضبوط هو $y_4(0) = 1.5$ أي أن الخطأ هو $err = 6.408 \times 10^{-6}$.

11. تحليل الاستقرارية وتقارب الطريقة الهجينة لحل مسائل القيم الحدودية:

Stability and Convergence Analysis of the hybrid method for solving boundary value problems:

من الواضح جدا أن الطريقة الهجينة المطورة تحتوي على مرحلتين .مرحلة حل المعادلة التفاضليةِ الاعتيادية ومرحلة الاندراج. وقد وضح عدد من الباحثين الاستقرارية والاتساق والتقارب لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية لامبرت (Lambert 1974)[14] وكونت ودي بور (Conte, de-Boor 1981)[7] وخلف (Khalaf 1990,2000)[13,12].أما في ما يخص البحث عن أفضل طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية فالجدول (17)[8] يتحدث عن مقارنة بين أنواع من الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية من حيث الدقة والاستقرارية وسهولة تغير خطوة التكامل:

الجدول (17)

مقارنة بين الطرائق العددية لحل المعادلات التفاضلية [8]

الطريقة	النوع	الخطأ المحلي	الاستقرارية	سهولة تغير الخطوةh	موصى بها
اويلر المطورة	وحيدة الخطوة	$O(h^3)$	جيدة	سهلة	لا
رنج–كوتا(مرتبة رابعة)	وحيدة الخطوة	$O(h^5)$	جيدة	سهلة	نعم
ميلن	متعددة الخطوة	$O(h^5)$	ضعيفة	صعبة	لا
ادم	متعددة الخطوة	$O(h^5)$	جيدة	صعبة	نعم

وهكذا معروف جيداً أن

تقارب الطريقة العددية لحل المعادلات التفاضلية → الاتساق + الاستقرارية

أما في مرحلة الاندراج فلا يوجد مشكلة في الاستقرارية وكذلك لا توجد مشكلة في التقارب ونحن فقط نحتاج من مرحلة الاندراج جعل التخمين الدقيق ممكناً وذلك عبر زيادة عدد التخمينات واستخدام متعددة حدود للاندراج ذات رتب عليا .أي ننا نحتاج في مرحلة الاندراج الى تقليل الخطأ الناتج عن الاندراج وهذا يمكن أن يعمل بسهولة لان الخطأ في الاندراج قد أعط اه كونت و دي بور (Conte, de-Boor 1981)[7] بالشكل الأتي:

$$e_n(\bar{x}) = f(\bar{x}) - p_0(\bar{x}) \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (\bar{x} - x_j) \qquad \textbf{(5)}$$

عندما $f(x)$ دالة القيمة الحقيقة المعرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ والقابلة للاشتقاق $(n+1)$ من المرات في (a,b) و $p_n(x)$ متعددة حدود التقريبية لـ $f(x)$ في $(n+1)$ للنقاط المميزة $x_0, x_1, ..., x_n$ في $[a,b]$ $\theta = \theta(\bar{x}) \in (a,b), and, \bar{x} \in (a,b), [a,b]$. فمن الواضح من الصيغة (5) أن الخطأ في الاندراج يتناقص عند زيادة عدد التخمينات وهكذا يمكن زيادة دقة الطريقة بوساطة زيادة عدد التخمينات واستخدام طرائق تكاملية لحل المعادلات التفاضلية متقاربة بدقة والآن يمكن أن نعرض القضية الآتية:

قضية: الطريقة الهجينة لحل مسائل القيم الحدودية متقاربة إذا كانت الطريقة التكاملية لحل المعادلة التفاضلية للقيم التخمينية متقاربة وطرائق الاندراج دقيقة.

12. الاستنتاجات والاقتراحات (Conclusions and Suggestions):

إن أهم ما تناوله البحث هو مسائل القيم الحدودية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتب الثانية و الثالثة والرابعة الخطية وغير الخطية التي تعد من الأمور المهمة في الرياضيات والفيزياء.

كذلك استخدمت الطريقة الهجينة (Hybrid Method) لحل مسائل القيم الحدودية ذات الرتب الثانية والثالثة والرابعة فضلاً عن استخدام الطريقة لحل مسائل القيم الحدودية ذات الشروط الحدودية المشتقة (Derivative Boundary Conditions) وقد لوحظ عند استخدام الطريقة الهجينة أن استخدام طرائق الاندراج الدقيقة واستخدام طرائق تكاملية ذات رتب عليا في البتر وتقليل خطوة التكامل وزيادة عدد التخمينات للقيم ة الحدودية المجهولة جميعاً عوامل تزيد من تحسين الناتج وتقليل الخطأ والحصول على الحل العددي القريب من الحل المضبوط.

إما المقترحات تتلخص بما يلي:

1 -إجراء دراسة إمكان تطبيق الطريقة الهجينة على مسائل القيم الحدودية الصلبة الجافة (Stiff BVPs).

2 -استخدام الطريقة الهجينة في الحاسبات المتوازية .

المصادر

1- الأ لوسي , احمد صالح وعادل زينل البياتي (1989),: " مقدمة في التحليل العددي " , مطبعة التعليم العالي في الموصل.

2- اللامي , كاظم محمد حسين (1989):" مقدمة في التحليل العددي ", مديرية دار الكتب للطباعة والنشر, جامعة الموصل.

3- حسون , حسن مجيد ومحمود عطا الله شكور(1999) :" التحليل الهندسي والعددي التطبيقي " , الجامعة التكنولوجية-بغداد-العراق .

4- سيفي , علي صادق وابتسام كمال الدين (1986) : " مبأدي التحليل العددي ", مديرية دار الكتب للطباعة والنشر , جامعة الموصل .

5- شكر, نزار حمدون(1989): " مسائل القيم الحدودية ", مطبعة التعليم العالي في الموصل.

6- Burden, R.L. and J.D. Faires (2001) : "Numerical Analysis" , 7th Edition , Youngstown State University .

7-Conte, S.D. and C. de Boor: (1981)" Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach", International Student edition, London .

8-Gerald,C.F. and P.O. Wheatley (1984):" Applied Numerical Analysis ", 3rd Edition , Addison - Wesley publishing company Inc.

9-Gerald,C.F. and P.O. Wheatley (2003):" Applied Numerical Analysis ", 7th Edition , Addison - Wesley publishing company Inc.

10-Karris,S.T :"Numerical Analysis Using MATLAB R and Spreadsheets" , Orchard Publications , WWW.ORCHARDPUBLICATIONS.COM.

11-Khalaf,B.M.S. (2004):"New Parallel Algorithms for BVPs in ODEs", Raf. J. Comp. & Math's, Vol.1 No.2,pp 47-66.

12-Khalaf,B.M.S. (1990):"Parallel Numerical Algorithms for Solving ODEs",Ph.D. Thesis University of Leeds School of Computer Studies, U.K.

13-Khalaf,B.M.S. (2000):"Techinques for Controlling The Stability of Numerical Solution of IVPs", Raf. J. Comp. & Math's, Vol.11 No.1,pp 95-106.

14-Lambert, J.D. (1974):"Computational Methods in ODEs", John Wileey & Sons Inc.

15- Mathews, J.H. and K. D. Fink (2004) : "Numerical Methods Using MATLAB" , 4th Edition , by person education Inc.

16-Stumme, F. & K. Hanier (1980) :" Introduction to Numerical Analysis ", Scottish Academic press Ltd.