الجريان في غشاء سائل على سطح صلب مائل

حكمت شريف مصطفى
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل

القبول	الاستلام
2009 / 04 / 06	2008 / 10 / 16

Abstract :

In this paper we concerned with two dimensional flow for incompressible thin liquid film on a solid surface which is inclined by an inclination angle α under the action of gravity force. We apply the momentum equations (Navier- Stokes) and the conservation of mass equation (continuity equation) with specified boundary conditions to obtain to equation that governs such flow, we use the numerical methods to find the thickness of the thin film.

الملخص :

درسنا في هذا البحث الجريان ثنائي البعد في غشاء رقيق لسائل غير قابل للانضغاط على سطح صلب مائل عن الأفق بزاوية α تحت تأثير قوة الجاذبية. وقد طبقنا معادلات الزخم (نافير - ستوكس) ومعادلة حفظ الكتلة (معادلة الاستمرارية) للحصول على المعادلة التي تحكم مثل هذا النوع من الجريان ضمن شروط حدودية معينة، وقد تم إيجاد سمك الغشاء الرقيق باستخدام طرق عددية.

1-1 المقدمة Introduction :

يعرف الميكانيك بانه العلم الذي يدرس توازن الأجسام وحركتها والأسباب المحدثة لذلك (Victor L. Streeter , E.Benjamin Wyile, 1979).

يعد علم ميكانيك الموائع فرعاً من فروع الميكانيك التطبيقية، اذ يختص بدراسة حركة الموائع وسكونها وهو واحد من أهم فروع العلوم الهندسية التي تخدم التخصصات الهندسية كافة (الطحان، ياسين هاشم، بكر عبد الصابر إبراهيم، 1990).

ان الرغوة (Foam) والأغشية الرقيقة (Thin films) التي تتكون عادة من الهواء وسائل لزج مع الشد السطحي (Surface tension) تمت دراستهما بشكل مستفيض سابقاً. ان دراسة الأغشية الرقيقة حديثاً أخذت طابعاً آخر وهو دراسة التأثيرات على سلوك هذه الأغشية، وان احد هذه التأثيرات هي نحافة (Thinnes) هذه الأغشية والتي لها أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الصناعية مثل عمليات الطلاء.

درس (Abdul ahad, 1994) الشروط الديناميكية على سطوح الأغشية الرقيقة، كما درس (Morshed, 1996) الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة في حالتي الجريان المستقر وغير المستقر أخذاً بنظر الاعتبار الموجات في هذه الأغشية عندما تكون لزوجة السائل صغيرة جدا. ان دراسة الأغشية الرقيقة أخذت بالتطور حديثا وظهر كثير من البحوث في هذا المجال، فقد درس (Javier, 2000) الجريان في الأغشية الرقيقة والذي يكون للشد السطحي وللجاذبية التأثير في جريان المائع، وباستخدام نظرية التزييت.

كما درس الباحثان (Kondic, L. and Diez, J., 2001) الجريان في الأغشية الرقيقة عندما تكون الجاذبية هي المسؤولة عن الجريان، ودرس(Roman, O. Gorigiriev, 2002) انتشار السوائل على السطوح الصلبة تحت تأثير قوى متنوعة وتمت دراسة عدم الاستقرارية لخط الاتصال.

كما درس كل من (Khdur, 2003) و (Mustafa, 2004) الجريان الزمني واللازمني في الأغشية الرقيقة والسائلة بزاوية β.

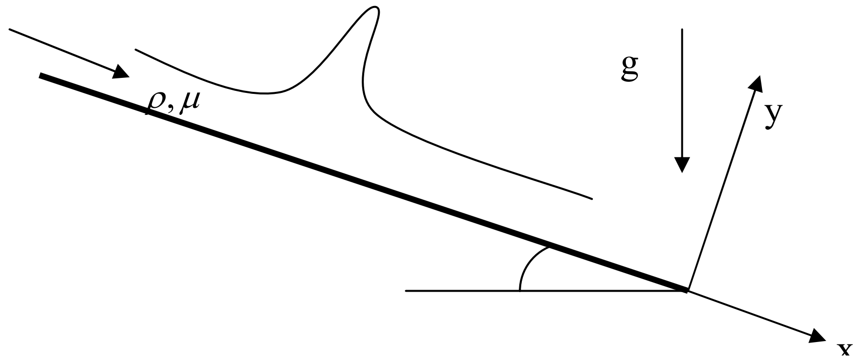
ودرس (Abdullah , 2006) الجريان اللزج في غشاء مثبت بين دليلين صلبين.

تناولنا في هذا البحث الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة لسائل غير قابل للانضغاط على سطح صلب مائل بزاوية α عن الأفق، حيث تم استخدام معادلات الزخم (نافير - ستوكس) ومعادلة الاستمرارية مع الشروط الحدودية المناسبة للمسالة، وتم الحصول على المعادلات التفاضلية التي تحكم الجريان في الأغشية الرقيقة السائلة و إيجاد سمك الغشاء الرقيق باستخدام طرق عددية.

1-2 صياغة المسألة Problem formulation

تأمل جريان ثنائي البعد في غشاء رقيق لسائل لزج على سطح صاب مائل بزاويـة α، الجريان مساق تحت تأثير قوى الجاذبية وقوى الشد السطحي.

ليكن U(u,v) سرعة السائل، حيث ان $u = u\ (x,y,t)$، $v = v\ (x,y,t)$ تمثلان مركبتي السرعة الموازية والعمودية للسطح الصاب على الترتيب، حيث t يمثـل الـ زمن وان $p = p$ (x,y,t) يمثل الضغط وكما مبين في الشكل (1.1).



الشكل (1.1)

مقطع عرضي لغشاء رفيق يجري على سطح صاب مائل

ان معادلة الاستمرارية تعطى بالصيغة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad ....(1-2-1)$$

ان معادلات الزخم (نافير - ستوكس) للجريان ثنائي البعد باتجاه الاحداثيين y,x علـى الترتيب بالصيغتين الآتيتين:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{-\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\rho g\sin(\alpha)\ ....(1-2-2)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{-\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\rho g\cos(\alpha)\ ....(1-2-3)$$

حيث ان ρ تمثل كثافة السائل، μ لزوجة السائل، و g يمثل التعجيل الأرضي. باستخدام نظرية التزييت، فان المعادلتين (2-2-1) و (3-2-1) تختزلان إلى الصيغتين الآتيتين :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho g \sin(\alpha) \qquad \text{..........} (1-2-4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho g \cos(\alpha) \qquad \text{..........}(1-2-5)$$

1-3 الشروط الحدودية Boundary conditions

1. عندما y = 0 فان v = 0 ، u = -1

2. شرط إجهاد القص (المماسي) على السطح الحر للغشاء:

عندما y = h فان $\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) s = 0$

حيث ان S يمثل الموقع على سطح الغشاء الحر.

3. شرط الاجهاد العمودي:

عندما y = h فان $p - P = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$

4. الشرط الكينماتيكي:

عندما y = h فان $\frac{\partial h}{\partial t} = v - u \frac{\partial h}{\partial x}$

حيث ان y = h(x,t) يمثل السطح الحر للغشاء الرقيق.

1-4 المعادلة العامة للجريان على سطح مائل:

من اجل الحصول على المعادلة العامة للجريان في الغشاء الرقيق لسائل لـزج يجـري على سطح صاب مائل نجري العمليات الآتية:

نكامل المعادلة (1-2-1) بالنسبة لـ y، نحصل على

$$v = -\frac{\partial u}{\partial x} y + c \qquad \text{.......... ...}(1-4-1)$$

بتطبيق الشرط الحدودي (1) على المعادلة (1-4-1)، تختزل المعادلة إلى الصيغة:

c=0

بتعويض قيمة c في المعادلة (1-4-1)، تختزل المعادلة إلى الصيغة:

$$v = -\frac{\partial u}{\partial x} y \qquad \text{.......... ...}(1-4-2)$$

بمقارنة المعادلة (1-4-2) مع الشرط الحدودي (4)، يكون لدينا

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}h - u\frac{\partial h}{\partial x}$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uh) \qquad ....(1-4-3)$$

والان، بتكامل المعادلة (1-2-5) بالنسبة لـ y، نحصل على:

$$p(x,y,t) = -\rho g\cos(\alpha)y + f(x,t) \qquad ....(1-4-4)$$

حيث ان f(x,t) دالة اختيارية

باشتقاق المعادلة (1-4-4) بالنسبة لـ x، نحصل على:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f(x,t) \qquad ....(1-4-5)$$

بتساوي المعادلتين (1-4-5) و (1-2-4)، نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g\sin(\alpha) \qquad ....(1-4-6)$$

وبمقارنة المعادلة (1-4-4) مع الشرط (3)، عندما y = h، تصبح لدينا

$$P = -\rho g\cos(\alpha)h + f(x,t) + \sigma\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad ....(1-4-7)$$

باشتقاق المعادلة (1-4-7) بالنسبة لـ x، ومن ثم تعويض المعادلـة (1-4-6) فـي المعادلة الناتجة، نحصل على :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g\sin(\alpha) + \sigma\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$$

او

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha) - \frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \qquad ....(1-4-8)$$

نكامل المعادلة (1-4-8) بالنسبة لـ y، ينتج :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha) - \frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]y + g(x,t) ....(1-4-9)$$

حيث ان g(x,t) دالة اختيارية.

للحصول على صيغة الدالة الاختيارية g(x,t)، نطبق الشرط الحـدودي (2) علـى المعادلـة (1-4-9)، نحصل على:

$$g(x,t)=\left[-\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)+\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]h \;...........(1-4-10)$$

وبتعويض المعادلة (1-4-10) عن g(x,t) في المعادلة (1-4-9)، ينتج:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]y-\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]h$$

أو

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right](y-h) \qquad ....(1-4-11)$$

وبتكامل المعادلة (1-4-11) بالنسبة لـ y، نحصل على:

$$u=\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]\left(\frac{y^2}{2}-hy\right)+L(x,t)\;.........(1-4-12)$$

حيث ان: L(x,t) دالة اختيارية

وللحصول على الدالة الاختيارية L(x,t)، نطبق الشرط الحدودي (1) علـى المعادلـة (1-4-12) لينتج :

L(x,t) = -1

وبتعويض قيمة L(x,t) في المعادلة (1-4-12) وضرب طرفي المعادلة الناتجة بـ h، نحصل على :

$$uh=\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]\left(\frac{y^2 h}{2}-h^2 y\right)-h\;...............(1-4-13)$$

وباشتقاق المعادلة (1-4-13) بالنسبة لـ x، وعندما y = h نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]\frac{h^3}{2}-\frac{\partial h}{\partial x}\;..............(1-4-14)$$

بتعويض المعادلة (1-4-14) في المعادلة (1-4-3)، نحصل على :

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]\frac{h^3}{2}+\frac{\partial h}{\partial x}\;.....................(1-4-15)$$

ان المعادلة (1-4-15) هي معادلة تفاضلية جزئية لاخطية من الرتبة الثالثة وهي تمثل المعادلة العامة للجريان في الغشاء الرقيق المائل بزاوية α .

1-5 الحالة اللازمنية (Steady flow)

في هذه الفقرة سنتناول دراسة الحالة اللازمنية للجريـان، أي ان: $\frac{\partial h}{\partial t}=0$ ، عليـه تصبح المعادلة (1-4-15) بالصيغة:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]\frac{h^3}{2}\text{.........................}(1-5-1)$$

بتكامل المعادلة (1-5-1) بالنسبة لـ x، نحصل على :

$$h+\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]\frac{h^3}{2}=c\text{.........................}(1-5-2)$$

حيث ان c ثابت التكامل.

لحل المعادلة (1-5-2) نأخذ الشرط الآتي:

(5) ...... عندما $x\to\pm\infty$ فان $\frac{\partial h}{\partial x}\to 0$ ، $h\to 1$

أي ان السطح بين الغشاء والسطح الصلب يقترب من سمك ثابت عند الابتعاد عن الاتجـاهين المقابل والمضاد للتيار.

بتطبيق الشرط (5) على المعادلة (1-5-2)، نحصل على:

$$C=1-\frac{\rho g}{2\mu}\sin(\alpha)+\frac{1}{2\mu}.\frac{\partial p}{\partial x}\qquad\text{............}(1-5-3)$$

بتعويض المعادلة (1-5-3) في المعادلة (1-5-2)، نحصل على :

$$h+\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]\frac{h^3}{2}=1-\frac{\rho g}{2\mu}\sin(\alpha)+\frac{1}{2\mu}.\frac{\partial p}{\partial x}\text{......}(1-5-4)$$

1-6 الحلول العددية للمعادلة (1-5-4):

في هذه الفقرة، سيتم حل المعادلة (1-5-4) والخاضعة للشرط الحدودي (5) عددياً، في جميع الحسابات العددية، نختار توزيع الضغط بالصيغة :

$$P=Ae^{-(\frac{x}{w})2} \qquad ....(1-6-1)$$

حيث ان A تمثل سعة اضطراب الضغط، و W يمثل مقياس عرض تلك الاتساع. هذه الصيغة تتوافق مع الشرط (5) لان P ومشتقتها بالنسبة لـ x تتلاشى عند المالانهاية.

الان، باشتقاق المعادلة (1-6-1) بالنسبة لـ x، نحصل على :

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{2A}{w^2}xe^{-\frac{x^2}{w_2}} \qquad ....(1-6-2)$$

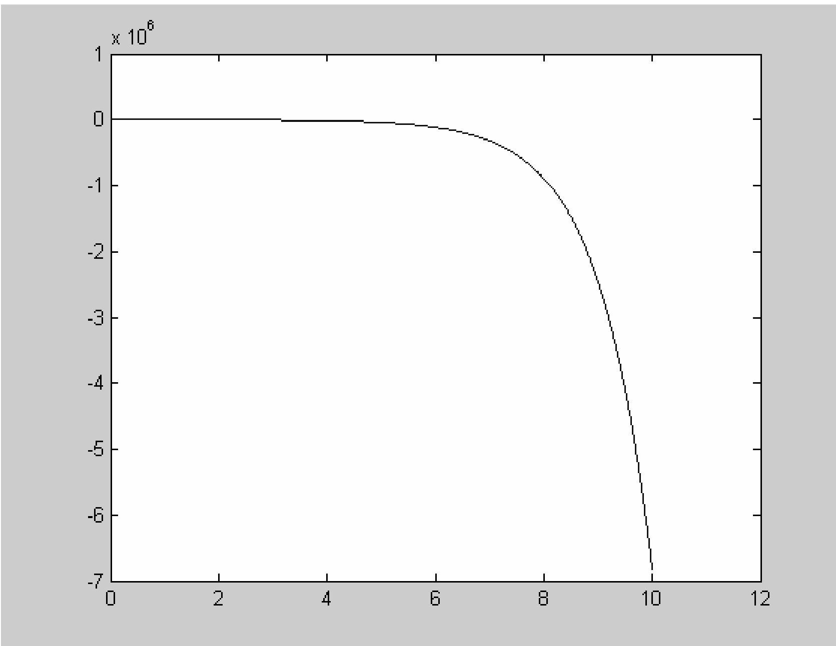
بتعويض المعادلة (1-6-2) في المعادلة (1-5-4)، نحصل على :

$$h+\left[\frac{-2A}{\mu w^2}xe^{-\frac{x^2}{w_2}}+\frac{\rho g}{\mu}\cos(\alpha)\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{\mu}\sin(\alpha)-\frac{\sigma}{\mu}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right]\frac{h^3}{2}=1-\frac{\rho g}{2\mu}\sin(\alpha)-\frac{A}{\mu w^2}xe^{-\frac{x^2}{w_2}}....(1-6-2)$$

باستخدام برنامج (Matlab) تم حل المعادلة (1-6-2) والخاضعة للشرط الحدودي (5) عددياً، بإعطاء قيم للكميات الفيزيائية والثوابت الموجودة في المعادلة وكالاتي :

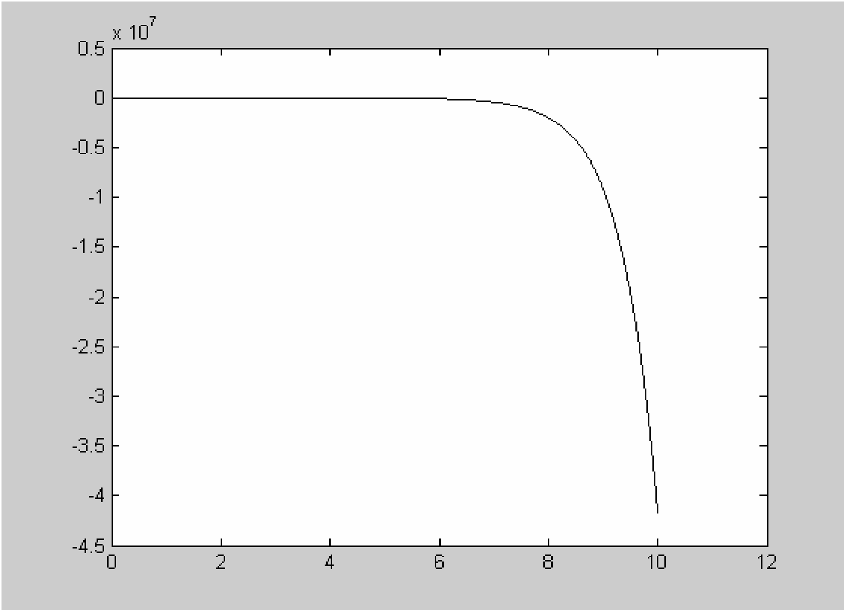
$$A = 1\ , \quad W=\frac{1}{2}\ , \quad \mu = 1\ , \quad \rho g = 1\ , \quad \sigma = 1\ , \quad \alpha=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$$

وقد تم إيجاد سمك الغشاء الرقيق للسائل اللزج، وكما موضح في الأشكال (2.2)، (2.3).



الشكل (2.2)

سمك الغشاء الرقيق α = pi / 3



الشكل (2.3)

سمك الغشاء الرفيق α= pi / 6

الاستنتاجـــات :

في الحالة اللازمنية نستنتج بانه كلما زادت الزاوية α أي زاوية المـيلان فـان سـمك الغشاء يبدأ بالتناقص والسبب في ذلك يعود إلى وجود قوة الجذب الأرضي التي تعمل علـى سحب الغشاء نحو الأسفل وكما مبين في الشكليين (2،1).

المصـــادر :

1) الطحان، ياسين هاشم، وبكر عبد الصابر إبراهيم، (1990)، ميكانيـك الموائـع، دار الحكمة للطباعة والنشر، جامعة الموصل، العراق.

2) صالح، خضر محمد، (2003). "الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة السائلة المائلـة". رسالة ماجستير، جامعة الموصل، العراق.

3) مصطفى، حكمت شريف، (2003). "الجريان الزمني واللازمني في الأغشية الرقيقـة السائلة والمائلة بزاوية B". رسالة ماجستير، جامعة الموصل، العراق.

4) عبد ا ، نصير صباح، (2006). "الجريان اللزج في بعض الأغشية الرقيقة". رسـالة ماجستير، جامعة الموصل، العراق.

5) Victor L. Streeter, E. Benjamin Wyile, 1979. fluid mechanics University of Michigan.

6) Abdul Ahad, J. G., (1994). "Similarity solution for unsteady flow thin liquid films", J. Ed. Sci., Vol. 17.

7) Morshed, A. M., (1996). "Fluid flow in thin liquid films". M. Sc. Thesis, University of Mosul.

8) Javier A., (2000). "Global models for moving contact lines". Physical reviews, Vol. 63, 011208, PP. 1-13.

9) Kondic L. and Diez, J., (2001). "Pattern formation in the flow of thin films down an incline constant flux configurations". J. Ph. Of fluid, Vol. 13, PP. 3168-3184.

10) Roman, O. Grigoriev, (2002). "Contact line instability and pattern selection in thermally drives liquid films". School of Ph. Georgia Institute of technology, Atlanta, GA. 30332-0430 November.

11) James J. kriegsmann and Michael J. Miksis, (1998). "Pressure driven disturbance on a thin viscous film". American Institute of Physics.