تحليل بيز لمسالة الانحدار الخطي المقيدة باستخدام معاينة جبس

يونس حازم إسماعيل
قسم الرياضيات / كلية التربية
جامعة الموصل

الاستلام	القبول
2009 / 03 / 15	2009 / 05 / 05

Abstract

In this paper we consider parameter estimation in a linear regression setting with inequality linear constraints on the regression parameters. Most other research on this topic has typically been addressed from a Bayesian perspective. In this paper we apply Bayesian approach with Gibbs sampler to generate samples from the posterior distribution. However, these implementations can often exhibit poor mixing and slow convergence. This paper overcomes these limitations with a new implementation of the Gibbs sampler. In addition, this procedure allows for the number of constraints to exceed the parameter dimension and is able to cope with equality linear constraints.

الملخص

يهدف هذا البحث إلى تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي وفق قيود علـى شـكل متباينة حول معلمات الانحدار. معظم البحوث في هذا المجال تعالج من وجهة نظر بيز. فـي هذا البحث تم تطبيق أسلوب بيز مع معاينة جبس Gibbs Sampling لتوليـد التوزيعـات اللاحقة والتي من خلالها نستطيع الحصول على تقارب سريع ونتائج دقيقة لتقدير المعلمـات. بالإضافة إلى ذلك طريقة عمل هذه المعالجة تسمح لان يكون عدد القيـود أكثـر مـن عـدد المعلمات. وأيضاً إمكانية نجاح العمل مع قيود المساواة.

1. المقدمة

اعتبر نموذج الانحدار الخطي الذي فيـه المعلمـات خاضـعة لقيـود خطيـة Linear Constraints من المتباينات والمساواة . افرض أن النموذج الخطي كما يلي:

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

حيث أن X مصفوفة التصميم كاملة الرتبة وتحتوي على k من المتغيـرات التوضـيحية و β متجه معلمات غير معلومة و $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ الذي يمثل حد الخطأ. وسـوف نحـاول استخدام هذا النموذج في التطبيقات الاقتصادية التي تتطلب وتحقق القيود:

$$\beta_i \geq 0$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots + \beta_k = 1$$

النموذج (1) ممكن كتابته بشكل ذات هيكل عام بحيث أن معلمات الانحدار β في هـذا النموذج خاضعة لمجموعة من القيود الخطية المعرفة كما يلي:

$$B\beta \leq b \quad , \quad C\beta \leq c$$

حيث أن C , B مصفوفات معلومة و c , b متجهات معلومة.

عد الباحثان Judge and Takayama (1966) والباحث Liew (1976) تقدير المعلمة β بطريقة المربعات الصغرى المقيدة بمتباينة Inequality Constrained Least Squares (ICLS) وذلك باستخدام خوارزمية Dantzig – Cottle. إن مقدر (ICLS) يختزل إلـى طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية عندما يكون حجم العينة كبير بـشكل كـاف وبوضـع الشرط على معرفة أي من القيود مرتبطة Binding وأي منها غير مرتبطة مع النمـوذج. تمكن الباحثون أعلاه من حساب مصفوفة التغاير غيـر المبتـورة لمقـدر (ICLS). وجـد Geweke (1986) أن هذه مصفوفة غير صحيحة في النتائج لان في التطبيق العملـي لهـا غير معروف مسبقاً أي من القيود ستكون مرتبطة مـع النمـوذج وعليـه فـان الاسـتدلال الإحصائي الذي يعتمد على هذه المـصفوفة يمكـن أن يـؤدي إلـى نتـائج غيـر دقيقـة. انظر Lovell and Prescott (1970) .

عندما تكون معاملات الانحدار β في النموذج الخطي (1) خاضعة لمجموعة من القيـود الخطية المتباينة المعرفة بالشكل:

$$B\beta \leq b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.. \quad (2)$$

هذه الحالة قد تم تحليلها من وجهة نظر بيز من قبل Geweke (1986) حيـث اسـتخدم توزيع أولي والذي يمثل حاصل ضرب توزيع قليل المعلومـات التقليـدي Conventional Uninformative Distribution ودالة المؤشر Indicator Function التي تمثـل قيـود المتباينة. التوزيع اللاحق والقيم المتوقعة للدوال يمكن حـسابها باسـتخدام معاينـة الأهميـة Importance Sampling وفي هذه الحالة دالة الأهمية يمكن إيجادها بسهولة بسبب بساطة

التوزيع الأولي Prior Distribution. هذه الطريقة بطيئة جدا خصوصا عندما تكون منطقة القطع Truncation Region تملك احتمالية صغيرة مع توزيع لاحق غير مقيد.

اقترح Gelfand et al. (1992) طريقة تعتمد على أسلوب سلسلة ماركوف مونتي كارلو Monte Carlo Markov Chain (MCMC) لتحليل المسائل التكرارية مع المعلمات المقيدة باستخدام معاينة جبس.

لتكن D تمثل معلومات عن البيانات و θ متجه المعلمات. افرض انه من الصعوبة سحب عينات من التوزيع اللاحق $p(\theta|D)$. معاينة جبس المقدمة من قبل Geman and Geman (1984) تولد عينات من التوزيع اللاحق $p(\theta|D)$.

افرض أن θ يمكن تجزئتها إلى $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q)'$ حيث أن θ_i إما أن تكون ذات بعد واحد أو أكثر. وكذلك يمكننا المحاكاة من خلال دوال الكثافة الاحتمالية اللاحقة $p(\theta_i|D\ ,\ \theta_j\ ,\ i \neq j)$ ، معاينة جبس تولد سلسلة ماركوف من خلال كل دورة $p(\theta_i|D\ ,\ \theta_j\ ,\ i \neq j)$ ، في كل دورة المعلومات الجديدة تحدث التوزيعات الشرطية اللاحقة.

تبدأ معاينة بقيم ابتدائية $\theta^{(0)}$ وبعد t من الدورات نحصل على $\theta^{(t)}$ تحت الشروط المطلوبة للتقريبات المسحوبة لـ $p(\theta|D)$ لعدد كبير من الدورات t. انظر Gelfand and Smith (1990).

الباحثين O'Hagan (1994), Roberts (1996), Gilks and Roberts (1996) علقوا على موضوع التقارب وقالوا بأنه يعتمد على الارتباط اللاحق بين مركبات θ.

طبق Geweke (1996) هذه الإجراءات على مسالة الانحدار الخطي عندما تكون القيود الخطية في (2) مستقلة خطياً ولكن هذه الطريقة لا يكون تقاربها سريع من خلال التوزيع اللاحق، وعدد القيود لا يمكن أن يتجاوز عدد المعلمات. وكذلك لا يمكن تطبيقها على قيود المساواة الخطية.

في طريقة Rodriguez – Yam et al. (2002) تنفيذ لمعاينة جبس مع مزيج Mixing من القيود غير السالبة على المعلمات المتوفرة. في هذه الحالة القيود تكون مستقلة خطياً وعدد القيود الخطية التي تكون بشكل متباينات يتفق مع عدد معاملات الانحدار.

في هذا البحث تم تنفيذ أسلوب جديد لمعاينة جبس على مسالة الانحدار المقيد. الصيغة العامة لهذا التنفيذ يمكنها أن تتغلب على القيود الخطية التي تكون بشكل متباينة التي تكون مستقلة خطياً وكذلك على قيود المساواة. وعدد القيود يمكن أن يتجاوز بعد المعلمة، فضلاً عن ذلك هذا التنفيذ يملك مزيج محكم يتطلب تكرار فعلي لسلسلة ماركوف بالاعتماد على معاينة جبس.

2. انحدار مقيد بيزي Bayesian Constrained Regression

أن نموذج بيز للانحدار الخطي المعطى في المعادلة (1) حيث المعلمات تخـضع للقيـود المعطاة في (2) يصف التوزيع الشرطي لـ y التي تعطي معاملات الانحدار وتباين الخطـأ. بشرط أن β تخضع للقيود $B\beta \le b$، ثم إن دالة الإمكان يمكن كتابتها كالآتي:

$$L(B,\sigma^2,y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-(y-x\beta)'(y-x\beta)\big/(2\sigma^2)\right\} \quad ....(3)$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-(n-k)\hat{\sigma}^2\big/(2\sigma^2) - (\beta-\hat{\beta})'x'x(\beta-\hat{\beta})\big/(2\sigma^2)\right\} \quad ....(4)$$

حيث $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}^2$ هي مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية للمعلمات β , σ^2 غيـر المقيـدة.

ويمكن برهنة أن المعادلة (3) تؤدي إلى المعادلة (4) وذلك كما يلي:

بإضافة وطرح $X\hat{\beta}$ إلى الحد $Y - X\beta$ يكون لدينا:

$$Y - X\hat{\beta} + X\hat{\beta} - X\beta = Y - \hat{Y} + X\hat{\beta} - X\beta$$
$$= \varepsilon + X\hat{\beta} - X\beta \quad ....(5)$$

حيث أن $\varepsilon = Y - \hat{Y}$, $\hat{Y} = X\hat{\beta}$.

الآن

$$(Y-X\beta)'(Y-X\beta) = (\varepsilon + X\hat{\beta} - X\beta)'(\varepsilon + X\hat{\beta} - X\beta)$$
$$= (\varepsilon + X(\hat{\beta}-\beta))'(\varepsilon + X(\hat{\beta}-\beta))$$
$$= \varepsilon'\varepsilon + \varepsilon'X(\hat{\beta}-\beta) + (\hat{\beta}-\beta)'X'\varepsilon + (\hat{\beta}-\beta)'X'X(\hat{\beta}-\beta) \quad .....(6)$$

وبما أن $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ إذن يكون لدينا:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'Y$$
$$\varepsilon = Y - \hat{Y} = Y - X(X'X)^{-1}X'Y$$
$$= (I - X(X'X)^{-1}X')Y = PY \quad ....(7)$$

حيث أن $P = I - X(X'X)^{-1}X'$ تسمى مصفوفة الإسقاط والتي تحقق الشروط التالية:

1) $PX = 0$

2) $P = P'$ متماثلة

3) $P = P^2$ غير قابلة للنمو

وعليه يكون الحد الثاني والثالث من المعادلة (6) مساويان للصفر وذلك لان:

$$\varepsilon'X(\hat{\beta}-\beta) = (PY)'X(\hat{\beta}-\beta)$$
$$= Y'PX(\hat{\beta}-\beta)$$
$$= Y'.0.(\hat{\beta}-\beta) = 0$$

$$(\hat{\beta}-\beta)'X'\varepsilon = (\hat{\beta}-\beta)X'(PY)$$
$$= (\hat{\beta}-\beta)'(Y'PX)'$$
$$= (\hat{\beta}-\beta)'.0 = 0$$

أما الحد الأول من المعادلة (6)

$$\varepsilon'\varepsilon = \frac{\sum \sigma^2}{(n-k)} . (n-k) = (n-k)\hat{\sigma}^2$$

الآن نفرض أن التوزيـع الأولـي قليـل المعلومـات Non – informative للمعلمـات $\theta = (\beta, \sigma^2)$ هو:

$$p(\beta, \sigma^2) \propto 1/\sigma^2 \quad , \quad B\beta \le b$$

إذا كانت $p(\beta, \sigma^2 | y)$ تدل على التوزيع اللاحـق Posterior Distribution لـ θ المعطـاة بالمتجه y فان:

$$p(\beta, \sigma^2 | y) \propto L(\beta, \sigma^2; y)\, p(\beta, \sigma^2) \qquad ....(8)$$

عينة هذا التوزيع تسمح لنا بحساب الخصائص الرياضية مثل الوسط الحسابي، التبـاين، الاحتمالات وغيرها. وللحصول على هذه العينة سنستخدم معاينة جبس.

من المعادلة (4) والنموذج (8) نحصل على :

$$\beta | (\sigma^2, y) \sim N(\hat{\beta}, \sigma^2 (X'X^{-1})) \quad , \quad B\beta \le B \qquad ....(9)$$

ومن المعادلة (3) والنموذج (8) نحصل على :

$$S(\beta)\sigma^2 | (\beta; y) \sim \chi^2_n \qquad ....(10)$$

حيث $S(\beta) = (y - x\beta)'(y - x\beta)$ و χ^2_n هو توزيع مربع كاي بدرجة حرية n .

الآن لتكن A مصفوفة غير منفردة بحيث $A(X'X)^{-1} = 1$ والمجموعة $\eta = A\beta$. نلاحظ أن η تخضع للقيد $BA^{-1}\eta \le b$ والذي تم الحصول عليه من $b \le B\beta = BA^{-1}A\beta = BA^{-1}\eta$.

لتكن $D = BA^{-1}$ و $\alpha = A\hat{\beta}$ ، من خلال النموذج (9) نحصل على :

$$\eta | (\sigma^2, y) \sim N(\alpha, \sigma^2 I) \quad , \quad D\eta \le b \qquad .... (11)$$

لانجاز معاينة جبس للمتجه المكون لدينا $\theta = (\eta, \sigma^2)$ نحتاج إلى التوزيع اللاحق للمتغير η . من النموذج (11) نحصل على:

$$\eta_i | (\eta, \sigma^2, y) \sim N(\alpha_j, \sigma^2) \qquad .... (12)$$

حيث أن المتغير η_j موضوع تحت القيود:

$$d_j n_j \le b - D_{-j}\, n_j \qquad .... (13)$$

3. مثال:

المثال العددي المعطى من قبـل Telser (1963) وTudge and Takayama (1966) يتضمن المبيعات السنوية بالبليون للسكائر لثلاثة ماركات رائدة. من 1925 إلى 1943 حيـث أعطي وقت محدد لحصص السوق لهذه الماركات وافترض أن احتمالية الانتقـال p_{ij} مـن الماركة i إلى الماركة j ثابتة بمرور الوقت.

اقترح Telser (1963) طريقة المربعات الصغرى لتقدير مصفوفة الاحتمال الانتقاليـة لعمليات ماركوف المنتهية عندما تكون السلاسل الزمنية للنسب المئوية للحالات معلومة عنـد كل حالة. حيث اقترح طريقة المربعات الصغرى التي تعتمد على مجموعة نمـاذج الانحـدار الموضوعة تحت قيود والتي معلماتها تكون غير سالبة ومجموع كل سطر مساوي للواحد.

أعطى Telsar (1963) نموذج الانحدار

$$y_{it} = \sum_{i=1}^{3} y_{i,t-1}\, p_{ij} + u_{jt} \qquad , \qquad t = 1,2,3 \qquad ....(14)$$

حيث أن y_{it} هي النسبة المستقلة في الحالة j وفي الزمن t ، $t = 1,2,......,T$ ، u_{it} هي الأخطاء المستقلة.

الاحتمالات p_{ij} موضوعة تحت القيود

$$\sum_{i=1}^{3} p_{ij} = 1 \qquad for\ all\ \ i \qquad ....(15)$$

$$p_{ij} \ge 0 \qquad for\ all\ \ i\ and\ \ j \quad ....\ (16)$$

لمجموعة البيانات هذه النماذج الثلاثة في (11) يمكن أن تكتب بالشكل الأتي:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad , \qquad ....(17)$$

حيث أن $y_j = \lfloor y_{j2}, ..., y_{jT} \rfloor$ و W مصفوفة التصميم الـشائعة ذات بعـد $3 \times T$ للنماذج في (14)، و p_j هو العمود j لمصفوفة الاحتمال الانتقالية لعمليات ماركوف المنتهية. و u_j متجه الأخطاء للنموذج (14).

Hocking (1996) دمج قيود المساواة الخطية وسماها النموذج التام للحـصول علـى النموذج المخفض.

في أسلوب بيز هنا تظهر لنا هيئة جديدة ، وان قيود المساواة تحتاج إلى أن تكون مندمجة لمساندة النموذج المخفض بدلالة y متجه الاستجابة للنموذج التام في (17) ، بتعويض

$$p_{i3} = 1 - p_{i1} - p_{i2} \qquad , \ i = 1,2,3$$

في هذا النموذج، نحصل على:

$$y - W_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 - W_3 & W_2 - W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + u \qquad , \qquad ....(18)$$

موضوع تحت القيود

$$p_{i1} + p_{i2} \le 1 \quad , \quad i = 1,2,3 \qquad ....(19)$$

$$p_{ij} \ge 0 \qquad , \quad i = 1,2,3 \quad , \quad j = 1,2 \qquad ....(20)$$

حيث u هي متجه الأخطاء للنموذج (17) .

الجدول التالي المقدم من قبل Telser (1963) يمثل جدول مبسط للمثال العـددي لماركـات السكائر لعمليات ماركوف المنتهية. البيانات لـ Telser (1963) متمثلة في الجدول بعزوم من الرتبة الثانية حول الصفر.

p_0	λ_1	λ_2	λ_3	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{12}	p_{22}	p_{32}	p_{13}	p_{23}	p_{33}	w
1				1			1			1			
e 1					1			1			1		
1						1			1			1	
2.576	1			2.658	2.193	1.988							
$X^{1'}y^{1}$ 2.143		1		2.193	2.069	1.700							
1.942			1	1.988	1.700	1.516							
2.283	1						2.658	2.193	1.988				
$X^{2'}y^{2}$ 2.111		1					2.193	2.069	1.700				$-I$
1.750			1				1.988	1.700	1.516				
1.980	1									2.658	2.193	1.988	
$X^{3'}y^{3}$ 1.705		1								2.193	2.069	1.700	
1.509			1							1.988	1.700	1.516	

جدول (1)

هذه المسالة حلات مرة أخرى من قبل Judge and Takayama (1966) حيث افترضوا أن $\operatorname{var}(u)=\sigma^2 I$ وطبقوا طريقة المربعات الصغرى على الجدول (1) المقدم من قبل Telser (1963).

في هذا البحث تم تطبيق أسلوب بيز مع معاينة جبس على بيانات الجدول (1) المقدم من قبل Telsar (1963) .

وهدفنا هو تطبيق معاينة جبس على معلمات النموذج ومن ثم حساب مصفوفة الاحتمال الانتقالية للنموذج.

افترضنا للبساطة أن $u \sim N(0,\sigma^2 I)$. ومع ذلك يمكن استخدام مصفوفة التباين والتباين المشترك. في هذه الحالة نحتاج تخصيص التوزيع الأولي للمتجه $(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2)$ نلاحظ أن عدد القيود في (19) و (20) في نموذج الانحدار (18) يتجاوز عدد معلمات الانحدار .

وقد تم فرض $\eta = A\beta$ حيث أن $A(X'X)^{-1}A = I$ وهذه المعادلة تم حسابها بواسطة برنامج تم كتابته بنظام MATLAB.

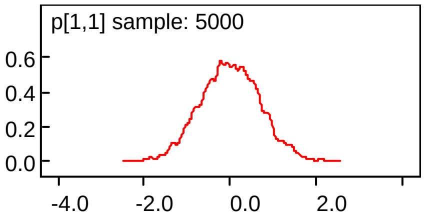
وقد تم كتابة برنامج بأسلوب بيز باستخدام معاينة جبس بواسطة البرنامج الجاهز WinBUGS حيث تم إدخال معادلة الانحدار (1) ومن ثم إدخال النموذج (12) وكذلك إدخال التوزيعات الأولية للمعلمات β,σ^2,α . وقد تم تكرار 5000 دورة لمعاينة جبس والحصول على التكرارات ومن ثم تم حساب مصفوفة الاحتمال الانتقالية التي كانت كما يلي:

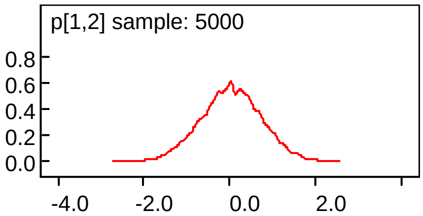
$$P=\begin{bmatrix}0.163 & 0.092 & 0.745\\ 0.389 & 0.074 & 0.537\\ 0.219 & 0.513 & 0.268\end{bmatrix}$$

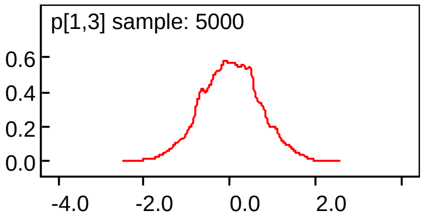
نلاحظ أن القيود 2

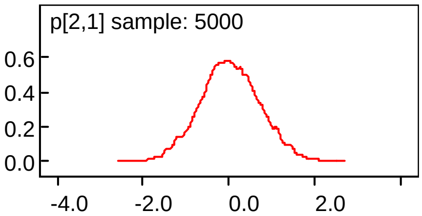
$$p_{ij} \ge 0 \qquad \forall i,j$$
$$\sum p_{ij} = 1$$

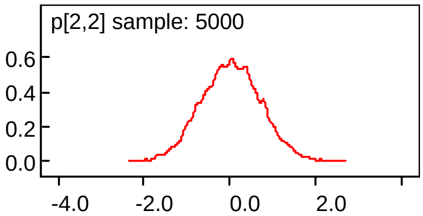
تتحقق في هذه المصفوفة. والإشكال التالية توضح دالة الكثافة الاحتمالية لمصفوفة الانتقال:

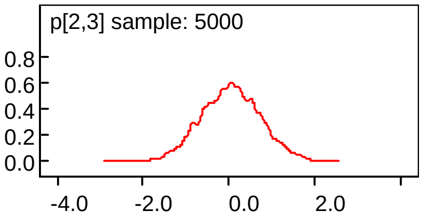

p[1,1] sample: 5000
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0
-2.0
0.0
2.0

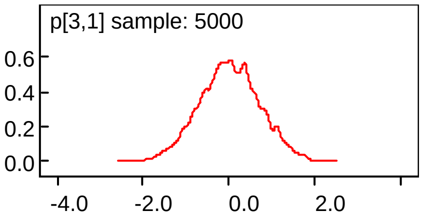

p[1,2] sample: 5000
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0
-2.0
0.0
2.0

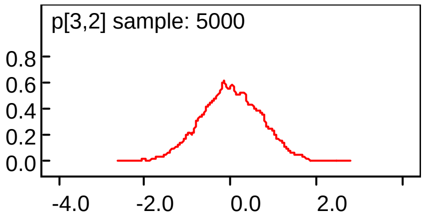

p[1,3] sample: 5000
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0
-2.0
0.0
2.0

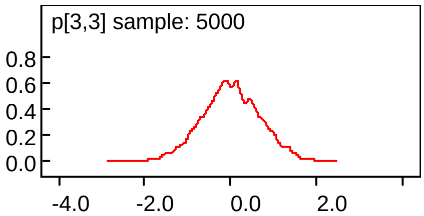

p[2,1] sample: 5000
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0
-2.0
0.0
2.0


p[2,2] sample: 5000
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0
-2.0
0.0
2.0


p[2,3] sample: 5000
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0
-2.0
0.0
2.0


p[3,1] sample: 5000
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0
-2.0
0.0
2.0


p[3,2] sample: 5000
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0
-2.0
0.0
2.0


p[3,3] sample: 5000
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-4.0
-2.0
0.0
2.0

الاستنتاجات:

في هذا البحث تم تطبيق تحليل بيز على نموذج الانحدار الخطي حيث المعلمـات تكـون موضوعة تحت قيود خطية بشكل متباينة. طريقتنا تعتمد على معاينـة جـبس لمتجـه مـن معاملات الانحدار. هذه المعاينة تملك خاصية لا تتمتع بها الطرق الأخرى كونها تقسم المسائل والنماذج المعقدة والصعبة إلى مجموعة مسائل بسيطة يمكن تحليلها ومعالجتها بسهولة، كمـا أن نتائجها تكون دقيقة وذلك لان هذه الطريقة تعتمد علـى المعلومـات الأوليـة للمعلمـات والمعلومات غالبا ما تكون متوفرة في معظم الدراسات. كما أن معاينة جبس يمكن استخدامها مع الحالات غير القياسية مثلا عندما يكون عدد القيود يتجاوز عدد معلمات الانحدار. فـضلاً عن ذلك معاينة جبس طريقة كفوءة ودقيقة لأنها تبدأ بقيم ابتدائية ومن ثم يجري عليهـا عـدد كبير من التكرارات. وكانت النتائج مشجعة.

التوصيات:

من الممكن استخدام هذا التحليل على نماذج الانحدار الخطي المتعدد والتي غالباً ما يـتم تطبيقها بواسطة استخدام برامج حاسوبية جاهزة.

References المصادر

1) Gelfand, A. E. and Smith, A. F. M. “Sampling-based Approaches to Calculating Marginal Densities,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, 85, 398-409. (1990).

2) Gelfand, A. E., Smith, A. F. M. and Lee, T. M. “Bayesian Analysis of Constrained Parameters and Truncated Data Problems” *J. Amer. Statist. Assoc.*, 87, 523-532. (1992).

3) Geman, S. and Geman, D. “Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images,” *IEEE trans. pattern anal. mach. intell*, 6, 721-741. (1984).

4) Geweke, J. “Exact Inference in the Inequality Constrained Normal Linear Regression Model,”*J. Appl. Econ.*, 1, 127-141. (1986).

5) Geweke, J. “Bayesian Inference for Linear Models Subject to Linear Inequality Constraints,” In: Zellner, A., Lee, J. S. (Eds.), Modeling and Prediction: Honouring Seymour Geisser. Springer, New York. (1996).

6) Gilks, W. R. and Roberts, G. O. "Strategies for Improving MCMC," In Markov Chain Monte Carlo in Practice (eds W. R. Gilks, S. Richardson and D. J. Spiegelhalter), Chapman & Hall, London, 89-114. (1996).

7) Hocking, R. R. "Methods and Applications of Linear Models: Regression and the Analysis of Variance," Wiley, New York. (1996).

8) Jugdge, G. C. and Takayama, T. "Inequality Restrictions In Regression Analysis," *J. Amer. Statist. Assoc.*, 61, 166-181. (1966).

9) Liew, C. K. "Inequality Constrained Least-Squares Estimation," *J. Amer. Statist. Assoc.*, 71,746-751. (1976).

10) Lovell, M. C. and Prescott, E.. "Multiple Regression with inequality constraints: Pretesting Bias, Hypothesis Testing, and Efficiency." *J. Amer. Statist. Assoc.*, 65, 913-925. (1970).

11) O'Hagan, A.. "Kendall's Advanced Theory of Statistics 2B: Bayesian Inference." London: Edward Arnold. (1994).

12) Roberts, G. O. "Markov Chain Concepts Related to Sampling Algorithms." In Markov Chain Monte Carlo in Practice (eds W. R. Gilks, S. Richardson and D. J. Spiegelhalter), 45-57. London: Chapman & Hall. (1996).

13) Rodriguez-Yam, G. A., Davis, R. A. and Scharf, L. L. "A Bayesian Model and Gibbs Sampler for Hyperspectral Imaging," Proc. 2002 IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, Washington, D.C. 105-109. (2002).

14) Rodriguez-Yam, G. A. "Estimation for State-Space Models and Bayesian Regression Analysis with Parameter Constraints," Ph.D. Dissertation, Deparment of Statistics, Colorado State University, USA. (2003).

15) Telser, L. G. "Least Squares Estimates of Transition Probabilities," in Christ, C. F., Friedman, M., Goodman, L. A., Griliches, Z., Harberger, A. C., Liviatan, N., Mincer, J. Mundlak, Y. Nerlove, M. Patinkin, D., Telser, L. G. and Theil, H. (Eds.), Measurement in Economics: Studies in Mathematical Economics and Econometrics: In memory of Yehuda Grunfeld. Stanford University Press, Stanford. (1963).