Numerical Analysis of the Burger Equation using Finite Differences

Saad A. Manna **Badran J. Salem**

College of Computer Science and Mathematics *College of Basic Education*

University of Mosul, Iraq

Received on: 23/07/2006 **Accepted on: 04/10/2006**

ABSTRACT

The Burger equation had been solved numerically by using two finite differences methods. The first is explicit scheme method and the second is Crank–Nicholson method. A comparison had been made between the two and we find that the Crank–Nicholson method is the best and most accurate than the explicit scheme method, as it is shown in (Table 1). Also the numerical stability for both methods has been made, the explicit scheme method is conditionally stable and the condition is $\alpha \le \frac{1}{2\varepsilon}$, while Crank–Nicholson method is unconditionally stable.

Keywords: Numerical Analysis, Finite Differences, explicit scheme method, Crank–Nicholson method, Burger Equation.

التحليل العددي لمعادلة Burger باستخدام الفروقات المنتهية

سعد عبد الله مناع **بدران جاسم سالم**

كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل *كلية التربية الأساسية، جامعة الموصل*

تاريخ استلام البحث: 2006/7/23 **تاريخ قبول البحث: 2006/10/4**

الملخص

لقد تم حل معادلة Burger باستخدام نوعين من طرائق الفرو قات المنتهية،الأولى هي الطريقة الصريحة والثانية طريقة Crank–Nicholson وقد تبين: أن الطريقة الثانية هي ألأدق والأفضل وذلك من خلال مقارنة نتائج كل طريقة مع الحل المضبوط كما مبين في الجدول (1) ، فضلاً عن دراسة الإستقرارية العددية للطريقتين المستخدمتين في حل معادلةBurger ، وقد تبين أن الطريقة الصريحة مستقرة بصورة مشروطة والشرط هو $\alpha \le \frac{1}{2\varepsilon}$ ، أما طريقة Crank-Nicholson فهي مستقرة من دون شروط.

الكلمات المفتاحية: التحليل العددي، طرائق الفروقات المنتهية، الطريقة الصريحة، طريقة Crank–Nicholson، معادلة Burger .

1. المقدمة Introduction

تعتبر المعادلات التفاضلية خير وسيلة لوصف معظم المسائل الهندسية والرياضية والعلمية على حد سواء، إذ يتضح ذلك جليا في وصف عمليات انتقال الحرارة، جريان الموائع، الحركة الموجية، الدوائر الإلكترونية فضلاً عن استخدامها في مسائل الهياكل الإنشائية والوصف الرياضي للتفاعلات الكيميائية ، وكذلك وصف معادلات الانتشار (Diffusion Equations) اللاخطية التي تؤدي دورا مهما في الأنظمة الحركية المشتتة ومن الأمثلة على معادلات الانتشار اللاخطية معادلة Burger. إن معادلات الانتشار هي مسائل قيم ابتدائية(Initial Value Problems) والتي تكون في حالة معتمدة على الزمن (Time Dependent Equations) والحل لهذا النوع من المسائل يكون في منطقة مفتوحة R التي تخضع لشروط حدودية ، هذه المسائل تنتج في دراسة موجات الضغط في السوائل وفي انتشار الجهد والإزاحة وانتشار الحرارة وغيرها، وبصورة عامة إن إمكانية الحصول على حلول تحليلية (Analytical Solution) لمسائل الانتشار هي معقدة كثيرا بالرغم من التطور المتزايد في المفاهيم والأساليب الرياضية المتبعة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية اللاخطية لذلك فان الحلول العددية (Numerical Solutions) هو الأسلوب الأمثل لدراسة خواص هذا النوع من المعادلات [7].

أن دراسة الخواص العامة لمعادلة Burgerضرورية لمعادلات مكانيك الموائع المشتركة. التي تبين التركيب ووجه التقارب كما هو الحال في معادلات(نافر – ستوكس (Navier – stokes) [5].

في عام (1990) درس Kakuda &Tosaka [5] تقريب العناصر الحدودية العامة لمعادلة Burger باستخدام طريقة جديدة هي طريقة العنصر الحدودي وقد توصلا إلى نظام من المعادلات شبه خطية تم حلها ضمنيا باستخدام طرائق تكرارية بسيطة.

وفي عام (1994) درس Estevez [4] التناظر غير التقليدي (غير القياسي) وطريقة singular manifold لمعادلة Burger إذ استخدم طرائق مباشرة لإيجاد التخفيضات المشابهة للمعادلات التفاضلية الجزئية لمعادلة Burger .

وفي عام (1997) درس zhoung [10] معادلة Burger بوجود عدد رينولد كبير وتبين له عند استخدام عدد رينولد كبير ($R \geq 10^5$) يحصل على دقة عالية وبتقسيمات اقل.

وفي عام(1998) درس Balogh & Krstic [2] معادلة Burger مع الشروط الحدودية غير الخطية وبين ان المعادلة تضمن استقرارية محاذية عامة واستقرارية آسية شبه عامة في H^1 كما درس مبرهنة الوجود والوحدانية للحل التقليدي لمعادلة Burger . وفي عام (2000)درس [1] Atoull & Kingاستقرارية طريقة العناصر المنتهية لمعادلةBurger وتبين لهما في معامل لزوجة صغير جدا تكون طريقة كالركن غير مستقرة وفي عام(2001)ناقش Leonenko & Meluikovn [6]تجانس معادلة الحرارة بجهد خطي وعلاقة معادلةBurger مع البيانات العشوائية كذلك في عام (2001) درس Balogh & Gilliam & Shubov [3] الحلول الساكنة لمعادلة Burger غير المتجانسة ووجد ان ثابت التكامل يؤدي دورا مهما في الحلول الساكنة ، إذ عندما يكون مقدار الزيادة لثابت التكامل هو موجباً فانه في القيمة الموجبة القليلة يوجد ثلاثة حلول ساكنة غير ثابتة ولقيمة كبيرة بكفاية فانه يوجد حل وحيد ذو استقرارية محاذية .

في هذا البحث ستتم دراسة الحل العددي لمعادلةBurger باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية (Finite Differences Methods) ، الأولى الطريقة الصريحة (Explicit Method)، والثانية طريقة Crank-Nicholson ومقارنة الطريقتين وبيان الطريقة المثلى لحل معادلة Burger ، كذلك دراسة الاستقرارية العددية لكلتا الطريقتين.

2. النموذج الرياضي Mathematical Model

أن من معادلات الانتشار المعروفة معادلة Burger غير الخطية آلاتية:[9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad ....(1)$$

حيث

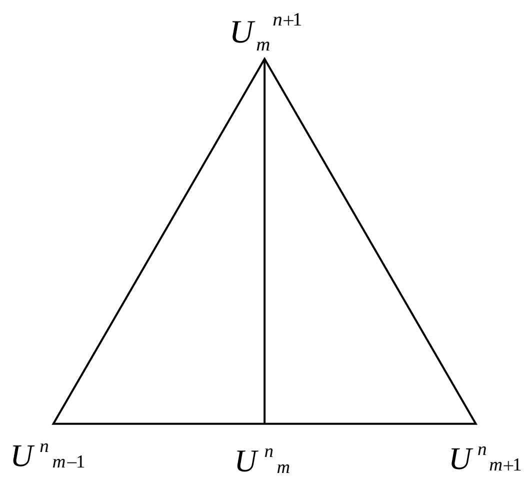
$$u(x,0) = u_0(x)$$
$$u(1,t) = g(t)$$
$$u(0,t) = f(t)$$
$$0 < x < l \qquad t>0 \quad \varepsilon > 0$$

المعادلة(1) تصف المجال لامتداد الموجة أو الذبذبة في أنظمة مبددة تلعب دورا مهما في الفيزياء غير الخطية .

ان من اكثر الطرائق استخداماً لحل المعادلات التفاضلية الجزئية هي طريقة الفروقات المنتهية (Finite Differences) التي تعطي تقريبات جيدة للحل.

3.الطريقة الصريحة Explicit Method

باستخدام الفروقات المركزية فالمعادلة المستخدمة للحل هي خطة صريحة (Explicit scheme) والتي عن طريقها يتم ايجاد قيمة الدالة u عند نقاط المشبك (m ,n+1) أي قيمة الدالة غير المعروفة U_m^{n+1} ويتم تحديدها بدلالة قيم الدوال المعرفة عند النقاط U_{m+1}^{n} و U_m^{n} و U_{m-1}^{n} عند الزمن t_n وكما في الشكل (1)



الشكل(1)

حيث نقسم المستوي إلى شبكة من المستطيلات ذات جوانب h,k. نقاط تقاطع هذه الخطوط تعرف بنقاط الشبكة(Grid points) والأسلوب العام لحل المعادلة التفاضلية الجزئية بهذه الطريقة هو الحصول على الحل عند نقاط الشبكة ، ونقاط الشبكة هذه قد تكون ناتجة عن تقاطع الخطوط المستطيلة أو المربعة بحيث:

$$x = mh$$

$$t = nk$$

$$m = 0,1,2,3..........\frac{1}{h}$$

$$n = 0,1,2,3..........\frac{1}{k}.$$

وعليه يكون التقريب العددي للمشتقة الجزئية الأولى والثانية للدالة (u) نسبة إلى (x) و (t) وباستخدام مفكوك تايلر كما يأتي[7]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^{n} - U_{m-1}^{n}}{2h} \qquad ...(2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{U_{m+1}^{n} - 2U_{m}^{n} + U_{m-1}^{n}}{h^2} \qquad ...(3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_{m}^{n+1} - U_{m}^{n}}{k} \qquad ...(4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{U_{m}^{n+1} - 2U_{m}^{n} + U_{m}^{n-1}}{k^2} \qquad ...(5)$$

الآن نأخذ معادلة(Burger)المتمثلة بالمعادلة (1) وباستخدام الفرو قات المركزية (4) ,(3),(2) فان المعادلة (1) تتحول ألى معادلة فروق وكما يأتي :

$$\frac{1}{k}(U_{m}^{n+1} - U_{m}^{n}) + U_{m}^{n}\left[\frac{1}{2h}(U_{m+1}^{n} - U_{m-1}^{n})\right] = \frac{\varepsilon}{h^2}(U_{m+1}^{n} - 2U_{m}^{n} + U_{m-1}^{n}).....(6)$$

وبضرب المعادلة (6) بـ k نحصل على:

$$U_{m}^{n+1} - U_{m}^{n} + \frac{k}{2h}U_{m}^{n}(U_{m+1}^{n} - U_{m-1}^{n}) = \varepsilon\alpha U_{m+1}^{n} - 2\varepsilon\alpha U_{m}^{n} + \varepsilon\alpha U_{m-1}^{n}$$

حيث $\alpha = \frac{k}{h^2}$

$$U_m^{n+1}=U_m^n-\frac{k}{2h}U_m^n(U_{m+1}^n-U_{m-1}^n)+\varepsilon\alpha U_{m+1}^n-2\varepsilon\alpha U_m^n+\varepsilon\alpha U_{m-1}^n$$

$$\Rightarrow U_m^{n+1}=(1-2\varepsilon\alpha)U_m^n-\frac{k}{2h}U_m^n(U_{m+1}^n-U_{m-1}^n)+\varepsilon\alpha(U_{m+1}^n+U_{m-1}^n)....(7)$$

حيث أن المعادلة(7) هي التي سوف تستخدم للحل بالطريقة الصريحة.

3- طريقة Crank Nicholson

تعتمد هذه الطريقة على تقريب حد الانتشار u_{xx} (Diffusion Term) بالمعدل الحسابي لتقريبات الفروقات المركزية لها عند الزمن(n+1),(n) وكما يأتي [7]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{k} \qquad .....(8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}}{h^2}+\frac{U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n}{h^2}\right] \qquad ......(9)$$

ألان نأخذ معادلة Burger المتمثلة بالمعادلة (1) وباستخدام المعادلتين (8) و(9) نحصل على:

$$\frac{1}{k}(U_m^{n+1}-U_m^n)=\frac{\varepsilon}{2h^2}.\left[(U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1})+(U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n)\right]$$
$$-U_m^n\left[\frac{1}{2h}(U_{m+1}^n-U_{m-1}^n)\right] \qquad ....(10)$$

بضرب طرفي المعادلة بـ k

$$(U_m^{n+1}-U_m^n)=\frac{k\varepsilon}{2h^2}.\left[(U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1})+(U_{m+1}^n-2U_m^n+U_{m-1}^n)\right]$$
$$-U_m^n\left[\frac{k}{2h}(U_{m+1}^n-U_{m-1}^n)\right] \qquad ...(11)$$

نفرض $\alpha=\frac{k}{h^2}$

$$U_m^{n+1} - U_m^n = \frac{\alpha\varepsilon}{2} U_{m+1}^{n+1} - \alpha\varepsilon U_m^{n+1} + \frac{\alpha\varepsilon}{2} U_{m-1}^{n+1} + \frac{\alpha\varepsilon}{2} U_{m+1}^n - \alpha\varepsilon U_m^n + \frac{\alpha\varepsilon}{2} U_{m-1}^n$$
$$- \frac{\alpha h}{2} U_m^n . U_{m+1}^n + \frac{\alpha h}{2} U_m^n U_{m-1}^n \qquad ....(12)$$

$$\Rightarrow (1+\alpha\varepsilon) U_m^{n+1} - \frac{\alpha\varepsilon}{2}(U_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) = \frac{\alpha\varepsilon}{2}(U_{m+1}^n + U_{m-1}^n)$$
$$+ (1 - \alpha\varepsilon - \frac{\alpha h}{2} U_{m+1}^n + \frac{\alpha h}{2} U_{m-1}^n) U_m^n \qquad ....(13)$$

بضرب طرفي المعادلة(13) في $\frac{2}{\alpha\varepsilon}$

$$(\frac{2}{\alpha\varepsilon} + 2) U_m^{n+1} - (U_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) = U_{m+1}^n + U_{m-1}^n)$$
$$+ (\frac{2}{\alpha\varepsilon} - 2 - \frac{h}{\varepsilon} U_{m+1}^n + \frac{h}{\varepsilon} U_{m-1}^n) U_m^n \qquad ....(14)$$

نلاحظ من المعادلة (14) أن الطرف الأيسر يتضمن ثلاث قيم غير معلومة للدلة (u) عند الخطوة الزمنية الجديدة (n+1) بينما القيم في الطرف الأيمن كلها معلومة عند الخطوة الزمنية السابقة (n) لذلك فان ألمعادلة هي علاقة ضمنية .

مثال:

في حل المثال التالي نأخذ معادلة Burger المتمثلة بالمعادلة (1) بحيث: [6]

$u(x,t) = Sin\pi x$

$u(1,t) = 0$

$u(0,t) = 0$

$0 < x < 1$

$\varepsilon = 0.1$

$k = 0.05$

$h = 0.1$

EXPLICIT $\varepsilon = 0.1$ $k = 0.05$ $h = 0.1$	**Crank –Nicholson** $\varepsilon = 0.1$ $k = 0.05$ $h = 0.1$	**Exact** $\varepsilon = 0.1$ $k = 0.05$ $h = 0.1$
0.0	**0.0**	**0.0**
0.2825	**0.2500**	**0.2586**
0.4666	**0.5089**	**0.5000**
0.6154	**0.7099**	**0.7064**
0.7145	**0.8601**	**0.8599**
0.7500	**0.9482**	**0.9423**
0.7121	**0.9299**	**0.9374**
0.5981	**0.8296**	**0.8334**
0.4151	**0.6197**	**0.6289**
0.1810	**0.3411**	**0.3393**
0.0	**0.0**	**0.0**

الجدول (1)

يوضح مقارنة الحل العددي للطريقة الصريحة وطريقة Crank-Nicholson مع الحل الحقيقي.

$\varepsilon = 0.01$ $k = 0.05$ $h = 0.1$	$\varepsilon = 0.001$ $k = 0.05$ $h = 0.1$	$\varepsilon = 0.0001$ $k = 0.05$ $h = 0.1$
0.0	**0.0**	**0.0**
0.288668674	**0.290456843**	**0.299852576**
0.488328655	**0.529495395**	**0.569104553**
0.805057382	**0.863615264**	**0.891248634**
0.906901320	**0.962486158**	**0.971597605**
0.952493795	**0.985246315**	**0.989952495**
0.901810621	**0.958614723**	**0.969245863**
0.801588455	**0.855439015**	**0.885246721**
0.481237150	**0.515894283**	**0.558314972**
0.208521053	**0.289568424**	**0.300415419**
0.0	**0.0**	**0.0**

الجدول (2)

يوضح الطريقة الصريحة بأخذ قيم مختلفة لـ ε (0.0001, 0.001, 0.01)

4. تحليل الأستقرارية في الطريقة الصريحة لمعادلة Burger

لدراسـة إسـتقرارية الطريقـة الصـريحة نسـتخدم طريقـة Fourier إذ يـتم فـي هـذه الطريقـة استبدال الحل U_m^n بـ $e^{j\beta x}$ ψ(t) إذ أن $j=\sqrt{-1}$ و β هو ثابت موجب [8] .

نعوض عن U_m^n بـ $e^{j\beta x}$ ψ(t) في المعادلة(6) نجد

$$\frac{1}{k}(\psi(t+k)\,e^{j\beta x}-\psi(t)\,e^{j\beta x})+\psi(t)\,e^{j\beta x}\,\frac{1}{2h}[\psi(t)\,e^{j\beta(x+h)}-\psi(t)$$
$$e^{j\beta(x-h)})]=\frac{\varepsilon}{h^2}(\psi(t)\,e^{j\beta(x+h)}-2\psi(t)e^{j\beta x}+\psi(t)e^{j\beta(x-h)})$$

$$\Rightarrow\frac{1}{k}(\psi(t+k)-\psi(t))\,e^{j\beta x}+[\frac{1}{2h}\,\psi(t)\,\psi(t)\,e^{j\beta x}\;e^{j\beta x}\,(e^{j\beta h}$$
$$-e^{-j\beta h})]=\frac{\varepsilon}{h^2}\,e^{j\beta x}\;\psi(t)\,(e^{j\beta h}-2+e^{-j\beta h})$$

بعد ضرب المعادلة السابقة بـ $\frac{k}{e^{j\beta x}}$

و بفرض $\alpha=\frac{k}{h^2}$ نجد

$$\psi(t+k)-\psi(t)+\frac{k}{2h}\psi(t)\psi(t)e^{j\beta x}(e^{j\beta h}-e^{-j\beta h})=\alpha\varepsilon\psi(t)(e^{j\beta h}-2+e^{-j\beta h})$$

$$\Rightarrow\psi(t+k)-\psi(t)=-\frac{k}{2h}\psi(t)\psi(t)e^{j\beta h}(\cos(\beta h)+j\sin(\beta h))-(\cos(\beta h)-j\sin(\beta h))$$
$$+\alpha\varepsilon\psi(t)\big[(\cos(\beta h)+j\sin(\beta h))-2+(\cos(\beta h)-j\sin(\beta h))\big]$$

$$\Rightarrow\psi(t+k)-\psi(t)=-\frac{k}{2h}\,\psi(t)\,\psi(t)\,e^{j\beta x}(2j\sin(\beta h))$$
$$+\alpha\varepsilon\psi(t)(2\cos(\beta h)-2)$$

وبما أن الجزء الحقيقي هو الذي يؤدي الى الاستقرارية لذلك نهمل الجزء الخيالي فنحصل على:

$$\psi(t)(1-\cos(\beta h))-2\alpha\varepsilon=\psi(t)\,\psi(t+k)-$$

$$\Rightarrow\;\psi(t+k)=\psi(t)-2\alpha\varepsilon\;\psi(t)\,(1-(1\;\;-2\sin^2(\frac{\beta h}{2}))$$

$$\Rightarrow \ \psi(t+k) = \psi(t) - 2\alpha\varepsilon\, \psi(t)\ (\ 2\sin^2(\frac{\beta h}{2}))$$

$$\Rightarrow \ \psi(t+k) = \psi(t)\ [1 - 4\alpha\varepsilon\ (\sin^2(\frac{\beta h}{2})\ ]$$

وبفرض $\phi = \alpha\varepsilon \sin^2(\frac{\beta h}{2})$

$$\Rightarrow \ \psi(t+k)/\psi(t) = (1 - 4\phi) = \zeta$$

وبأخذ القيمة المطلقة للطرفين

$$\Rightarrow \ \left|\psi(\mathrm{t}+\mathrm{k})/\psi(\mathrm{t})\right| = \left|\zeta\right| \qquad ....(15)$$

حيث أنه كلما تقدم الحل من سطح مستوٍ خاص لـ $\psi(t)$ إلى سطح مستوٍ أخر $\psi(t+k)$ فان $|\psi(t+k) - \psi(t)|$ يجب أن تبدأ بالنقصان أو الدالة $\psi(t)$ يجب أن تكون دالة محددة أي يجب أن لاتقترب من اللانهاية عندما t كبيرة وذلك للحصول على الاستقرارية [8].

من المعادلة (15) لنقيد $\psi(t)$ نحتاج إلى

$$\Rightarrow 1 \le \left|\psi(\mathrm{t+k})/\psi(\mathrm{t})\right|$$

$$\left|\zeta\right| \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left|1 - 4\phi\right| \ \le 1$$

$$\Rightarrow \ -1 \le \ (1 - 4\phi\ ) \le 1 \qquad ....(16)$$

في المتباينة المذكورة أنفاً نأخذ الطرف الأيمن منها

$$(1 - 4\phi\,) \le 1$$

بالتعويض عن قيمة ϕ نحصل

$$(1 - 4\alpha\varepsilon\,(\sin^2(\frac{\beta h}{2})\,)\le 1$$

تكون $\alpha \ge 0$ وهذه تكون دائما صحيحة .

ولهذا ولكي تكون المعادلة (16) صحيحة نحتاج إلى اخذ الطرف الأيسر

$$\Rightarrow -1 \le (1 - 4\alpha\varepsilon(\sin^2(\frac{\beta h}{2}))$$

$$\Rightarrow -2 \le -4\alpha\varepsilon(\sin^2(\frac{\beta h}{2}))$$

$\Rightarrow \quad 2 \geq 4\alpha\varepsilon(\sin^2(\frac{\beta h}{2}))$

لبعض قيم β يكون $\sin^2(\frac{\beta h}{2})$ يساوي واحد فنحصل على:

$4\varepsilon\alpha \leq 2$

$\alpha \leq \frac{1}{2\varepsilon}$

إذا طريقة الفروقات المركزية لمعادلة بيركر تكون مستقرة عندما $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2\varepsilon}$

(2-1-3) تحليل الإستقرارية في طريقة Crank-Nicholson لمعادلة Burger:

نعوض **عن** U_m^n **بـ** $\psi(t)e^{j\beta x}$ **في** المعادلة(10)نحصل على:

$$\frac{1}{k}(\psi(t+k)\,e^{j\beta x} - \psi(t)\,e^{j\beta x}) = \frac{\varepsilon}{2h^2}[(\psi(t+k)\,e^{j\beta(x+h)} - 2\psi(t+k)\,e^{j\beta x}$$
$$+\psi(t+k)\,e^{j\beta(x-h)}) + (\psi(t)\,e^{j\beta(x+h)} - 2\psi(t)\,e^{j\beta x} + \psi(t)\,e^{j\beta(x-h)})]$$
$$-\frac{1}{2h}\,\psi(t)\,e^{j\beta x}(\psi(t)\,e^{j\beta(x+h)} - \psi(t)\,e^{j\beta(x-h)})$$

وبضرب طرفي المعادلة ب k

وبفرض $\alpha = \frac{k}{h^2}$

$$(\psi(t+k) - \psi(t))\,e^{j\beta x} = \frac{\varepsilon\alpha}{2}\,e^{j\beta x}((\psi(t+k)\,e^{j\beta h} - 2\psi(t+k) + \psi(t+k)$$
$$e^{-j\beta h}) + \frac{\varepsilon\alpha}{2}\,\psi(t)\,e^{j\beta x}(e^{j\beta h} - 2 + e^{-j\beta h}) - \frac{k}{2h}\,\psi(t)\,e^{j\beta x}$$
$$\psi(t)\,e^{j\beta x}(e^{j\beta h} - e^{-j\beta h})$$

ألان نضرب في $\frac{1}{e^{j\beta x}}$

$$\psi(t+k)-\psi(t)=\frac{\varepsilon\alpha}{2}\psi(t+k)\,(e^{j\beta h}-2+e^{-j\beta h})+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\psi(t)(e^{j\beta h}-2+e^{-j\beta h})$$

$$-\frac{k}{2h}\psi(t)\psi(t)e^{j\beta x}(e^{j\beta h}-e^{-j\beta h})$$

منها نحصل على:

$$\psi(\mathrm{t}+k)-\psi(t)=\frac{\varepsilon\alpha}{2}\psi(t+k)\left[(\cos(\beta h)+j\sin(\beta h))-2+(\cos(\beta h)-j\sin(\beta h))\right]$$

$$+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\psi(t)\left[(\cos(\beta h)+j\sin(\beta h))-2+(\cos(\beta h)-j\sin(\beta h))\right]$$

$$-\frac{\mathrm{k}}{2\mathrm{h}}\psi(\mathrm{t})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta\mathrm{x}}\psi(\mathrm{t})\left[(\cos(\beta h)+j\sin(\beta h))-(\cos(\beta h)-j\sin(\beta h))\right]$$

$$\Rightarrow \psi(t+k))-\psi(t)=\frac{\varepsilon\alpha}{2}\psi(t+k)\;[(2\cos(\beta h)-2)]$$

$$+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\psi(t)[(2\cos(\beta h)-2)]-\frac{k}{2h}\;\psi(t)\,e^{j\beta x}\,\psi(t)\left[2j\sin(\beta h)\right]$$

وبما أن الجزء الحقيقي هو الذي يؤدي الى الاستقرارية لذلك نهمل الجزء الخيالي فنحصل على:

$$\psi(t+k)-\psi(t)=-\varepsilon\alpha\,(1-\cos(\beta h))\;\;[\psi(t+k)+\psi(t)\;]$$

$$\Rightarrow\;\psi(t+k)-\psi(t)=-\;\varepsilon\alpha\,[1\text{-}(1\text{-}2\sin^2(\frac{\beta h}{2}))][\psi(t+k)+\psi(t)\;]$$

$$\Rightarrow\;\psi(t+k)-\psi(t)=-\;2\alpha\varepsilon\;(\sin^2(\frac{\beta h}{2}))[\psi(t+k)+\psi(t)\;]$$

نفرض $\phi=-2\alpha\varepsilon\sin^2(\frac{\beta h}{2})$

$$\Rightarrow \psi(t+k)=\psi(t)+\phi\;\;[\;\psi(t+k)+\psi(t)\,]$$

بالقسمة على $\psi(t)$ نحصل:

$$\Rightarrow \psi(t+k)/\psi(t)=1+[\ \phi\ (\psi(t+k)+\psi(t))]/\ \psi(t) \qquad \psi(t)\neq 0$$

منها نحصل على:

$$\psi(t+k)/\psi(t)=1+\phi\ \ (\psi(t+k)/\psi(t))+\phi$$

$$\Rightarrow \psi(t+k)/\psi(t)\ (1-\phi)=1+\phi$$

$$\Rightarrow \psi(t+k)/\psi(t)=\frac{1+\phi}{1-\phi}=\zeta$$

$$\Rightarrow\ |\psi(t+k)/\psi(t)|\leq 1$$

$$\Rightarrow |\zeta|\leq 1$$

لكل قيم $0<\alpha$ و $|\zeta|\leq 1$

ولهذه تكون طريقة **Crank-Nicholson** غير مشروطة لكي تكون مستقرة أي لا ترتبط بشروط.

REFERENCES

[1] Atoull, J.A and B.B. King (2000) “Stabilized Finite Element Methods and Feed back control for Burger Equation”, **American control conference**, PP. 25-31.

[2] Balogh, A. and M. Krstic (1998) “Burger's equation with nonlinear boundary feedback: H^1 stability”, **well-posed ness and simulation**, http://www-ames.ucsd.edu/research/krstic.

[3] Balogh, A.; D. S. Gilliam, and V. I. Shubov (2001) “Stationary solutions for a boundary controlled burger's equation”, **Math. and computer modeling**, vol. 33, PP. 21-37.

[4] Estevez, P. G. (1994) “Non-classical symmetries and the singular manifold method: the burgers and the burgers-huxley equations”, **J. Phys. A: Math. Gen**., Vol. 27, PP. 2113-2127.

[5] Kakuda, K. and N. Tosaka (1990) “The generalized boundary element approach to burger's equation”, **International J. for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 29,PP. 245-261.

[6] Leonenko, N.N. and Meluikovn (2001) “Renarmahzation and Homogenization of the solutions of heat equation with linear Potential and related Burgers equation with random data”, **Theory probab & Math. Statistics 1**,PP.27-64.

[7] Mitchell A.R. and D.F. Griffiths (1980) **The Finite Difference Method In Partial Differential Equation,** John Wiley & Sons. chichester .New York .515-353.QA37479.40626.

[8] Shan Thakumar M. (1989) Computer Based Numerical Analysis, Khanna Publishers, 2.B nath market,Neisaraic Delhi – 110006 India.

[9] Wany X.Y.; Z.S. Zhus and Y.K. Lu (1990) “Solitary Wave Solution of The Generalized Burgers-Huxley Equation”, **Phys.A: Math. Gen. 23**, PP.271- 274.

[10] Zhaug D.S.; G.W. Wei, ; D. J. Kouri and Q.K. Hoffman (1997) “Burger’s Equation with High Reynolds Number”, **J. Phys. Fluid** 9(6),PP. 1853 -1855.