Flow in Inclined Thin Liquid Films with no Inertia Force

Joseph Gh. Abdel-Ahd **Hikmat Sh. Mustafa** **Khidr M.S. Khidr**

College of Education *College of Science*

University of Mosul *University of Kirkuk*

Received on: 03/09/2006 **Accepted on: 16/11/2006**

ABSTRACT

In this paper we have investigated viscous flow in symmetric thin liquid films which are inclined by an inclination angle β to the horizontal for an incompressible liquids in two dimensions with no inertia force. We use the (Navier-Stocks) equations and we obtain equations that govern such flow and we solved these equations by numerical methods to obtain the thickness of the film.

Keywords: viscous flow, thin liquid films, incompressible liquids, inertia force, Navier-Stocks equations.

الجريان في الأغشية الرقيقة السائلة والمائلة بانعدام قوى القصور الذاتي

جوزيف غانم عبد الأحد **حكمت شريف مصطفى** **خضر محمد صالح خضر**

كلية التربية، جامعة الموصل *كلية العلوم، جامعة كركوك*

تاريخ استلام البحث: 2006/09/03 **تاريخ قبول البحث: 2006/11/16**

الملخص

في هذا البحث تم التطرق الى دراسة الجريان اللزج في الأغشية الرقيقة المتناظرة المائلة بزاوية β مع الإحداثي الأفقي للسوائل غير القابلة للانضغاط في نظام ثنائي البعد وذلك بإهمال قوى القصور الذاتي ، إذ استخدمت معادلتا (نافير – ستوكس) وتم الحصول على المعادلات التي تحكم هذا النوع من الجريان وتم إيجاد حلول المعادلات بالطرق العددية لإيجاد سمك الغشاء.

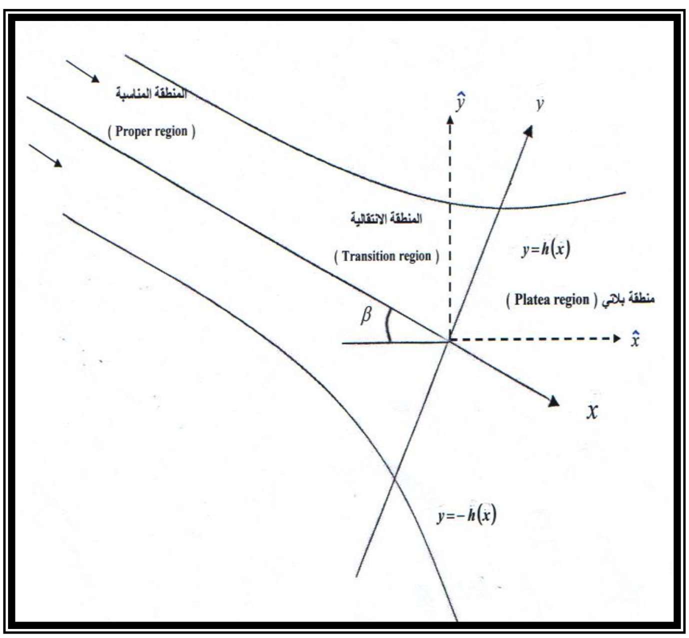
الكلمات المفتاحية: الجريان اللزج، الأغشية الرقيقة المائلة، السوائل غير القابلة للانضغاط، قوى القصور الذاتي، معادلات نافير – ستوكس.

(1-1) المقدمة Introduction :

الأغشية الرقيقة (Thin films) هي حالة خاصة في ميكانيك الموائع ، والتي تتكون عادة من الهواء وسائل لزج مع الشد السطحي (Surface tension) ، ونحافة هذه الأغشية لها أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الصناعية مثل عمليات الطلاء .

دَرَسَ الأغشـــية الرقيقـــة ســـابقاً العديـــد مـــن البـــاحثين ، فقـــد درس (Abdul Ahad, 1994) الشـروط الديناميكيـة علـى سـطوح الأغشـية الرقيقـة ، كمـا درس (Morshed, 1996) الشروط الحدية على سطوح الأغشية الرقيقة للسوائل . كما أهتم كل من (B. R. Duffy and S. K. Wilson, 1997) بدراسة جريان الأغشية الرقيقة اللزجة للموائع والتي يكون فيها الغشاء سطحاً حراً بوجود الشد السطحي ودرس (Javier, 2000) الجريان في الأغشية الرقيقـة والـذي يكـون للشـد السـطحي والجاذبيـة تـأثير فـي جريـان الموائـع باسـتخدام نظريـة التزييـت (Lubrication Theorem) . كمـا درس كـل مـن (Khdur, 2003) و(Mustafa, 2003) الجريان الزمني واللازمني في الأغشية الرقيقة والمائلة بزاوية .

في بحثنا هذا سوف نتطرق إلى دراسة الجريان اللزج في الغشاء المتناظر المائل لسوائل غير قابلة للانضغاط باعتبار أن جهد القص على السطح الحر يكون مساوياً للصفر وبانعدام قوى القصور الذاتي وكما موضح في الشكل (1-1)



الشكل (1-1)

مقطع عرضي في غشاء رقيق متناظر مائل

(1-2) المعادلات التي تحكم الجريان (Governing equation) :

ليكن $q(u,v)$ يمثل متجه السرعة للجريان ، وان $u=u(x,t)$, $v=v(x,y,t)$ تمثلان مركبتي السرعة في الاتجاهين y,x على الترتيب و $p=p(x,y,t)$ يمثل الضغط.

إن معادلة السطح الحر للغشاء المتناظر لها الصيغة الآتية :

$$y=\pm h(x,t) \qquad \ldots(1.2.1)$$

حيث إن $h(x,t)$ يمثل سمك الغشاء .

سوف نحصر اهتمامنا بالحالة التي يكون فيها $\left(\frac{\partial h}{\partial x}<<1\right)$ على المجال x ، وبهذا يمكن إهمال الحد $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$ من معادلة الانحناء التي لها الصيغة :

$$k=\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad \ldots(1.2.2)$$

فتصبح بالصيغة الآتية :

$$k=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad \ldots(1.2.3)$$

إن المعادلات الأساسية التي تحكم الجريان في الغشاء المتناظر المائل وفي النظام ثنائي البعد هما معادلتا الزخم (نافير – ستوكس) في الاتجاهين y,x وعلى الترتيب :

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\rho g\sin(\beta) \qquad \ldots(1.2.4)$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\rho g\cos(\beta) \qquad \ldots(1.2.5)$$

ومعادلة الاستمرارية التي لها الصيغة الآتية :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \ldots(1.2.6)$$

باستخدام نظرية التزييت ، فان معادلتي الزخم (1.2.4) و (1.2.5) تختزلان إلى :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \rho g \sin(\beta) \qquad \ldots(1.2.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \rho g \cos(\beta) \qquad \ldots(1.2.8)$$

بتكامل معادلة الاستمرارية (1.2.6) بالنسبة إلى y ، نحصل على :

$$v = -y\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \ldots(1.2.9)$$

وباشتقاق المعادلة (1.2.9) مرتين بالنسبة إلى x وتعويضها في (1.2.8) ، نحصل على :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\mu y\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) - \rho g \cos(\beta) \qquad \ldots(1.2.10)$$

(1-3) الشروط الحدودية Boundary conditions :

1. شرط إجهاد القص (المماسي) على السطح الحر للغشاء :

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s = 0 \qquad \ldots(1.3.1)$$

حيث أن : s يمثل سطح الغشاء الحر .

2. شرط الإجهاد العمودي / Normal-Stress condition :

$$w = \sigma k \qquad \ldots(1.3.2)$$

حيث أن : σ يمثل الشد السطحي .

بتعويض (1.2.3) في (1.3.2) ، نحصل على :

$$w = \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad \ldots(1.3.3)$$

كما يمكن إعطاء مركبة الإجهاد العمودي بصيغة أخرى :

$$w = \left[-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right]_s \qquad \ldots(1.3.4)$$

ومن المعادلتين (1.3.3) و (1.3.4) ، نحصل على :

$$\left[-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right]_s = \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad \ldots(1.3.5)$$

على السطح الحر ، يمكن كتابة المعادلة (1.2.6) بالصيغة الآتية :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_s = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_s \qquad \ldots(1.3.6)$$

وبتعويض (1.3.6) في (1.3.5) وبعد ترتيب الحدود ، نحصل على :

$$p = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \ldots(1.3.7)$$

3. شرط المشتقة التي تتبع الجسيم على السطح الحر :

Material derivative at free surface condition

يمكن كتابة معادلة السطح الحر للغشاء (1.2.1) ، بالصيغة :

$$F(x, y, t) = y - h(x, t) = 0 \qquad \ldots(1.3.8)$$

وباستخدام المؤثر :

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$

نحصل على :

$$\frac{DF}{Dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad \text{on} \qquad y=h$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \ldots(1.3.9)$$

باشتقاق المعادلة (1-3-7) بالنسبة إلى x وبمساواتها مع (1.2.7) نحصل على :

$$\sigma\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}+3\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho g\sin(\beta)=0 \qquad \ldots(1.3.10)$$

الآن ، بتكامل (1.3.10) بالنسبة إلى x مرتين نحصل على :

$$\frac{\sigma}{3\mu}\frac{\partial h}{\partial x}+u+\frac{\rho g}{6\mu}\sin(\beta)x^2=G_1(t)x+F_1(t)$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{u}{v}+\frac{\rho g}{6\mu v}\sin(\beta)x^2=\frac{G_1(t)}{v}x+\frac{F_1(t)}{v}$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{u}{v}+\frac{\rho g}{6\mu v}\sin(\beta)x^2=G(t)x+F(t) \qquad \ldots(1.3.11)$$

حيث إن : $F(t)$ و $G(t)$ دوال اختيارية وان :

$$v=\frac{\sigma}{3\mu}$$

الآن ، عندما $G(t)\neq 0$ فانه يمكن كتابة الطرف الأيمن من (1.3.11) بالصيغة :

$$G(t)x+F(t)=xH(t) \qquad \ldots(1.3.12)$$

بتعويض (1.3.12) في (1.3.11) ، نحصل على :

$$\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{u}{v}+\frac{\rho g}{6\mu v}\sin(\beta)x^2=xH(t)$$

أو

$$u = v\left[xH(t) - \frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\rho g}{6\mu}\sin(\beta)x^2 \qquad \ldots(1.3.13)$$

بتعويض (1.3.13) في (1.3.9) ، نحصل على :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + vH(t)x\frac{\partial h}{\partial x} - v\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - \frac{\rho g}{6\mu}\sin(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}x^2 + hvH(t) -$$

$$vh\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\rho g}{3\mu}\sin(\beta)hx = 0 \qquad \ldots(1.3.14)$$

وهذه تمثل المعادلة الأساسية التي تحكم الجريان في الغشاء المتناظر المائل .

(4-1) الصيغة اللابعدية لمعادلة الجريان للغشاء المتناظر:

لتحويل المعادلة (1.3.14) إلى الصيغة اللابعدية ، نفرض الأتي :

$$x = \alpha_1 \eta t^{p_1} \qquad \ldots(1.4.1)$$

$$h(x,t) = \alpha_2 t^{p_2} f(\eta) \qquad \ldots(1.4.2)$$

$$H(t) = \alpha_3 t^{p_3} \qquad \ldots(1.4.3)$$

حيـــث أن: $f(\eta)\ ,\ \eta = \eta(x,t)$ دوال بعديـــة و $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ ,\ p_1, p_2, p_3$ ثوابت[5].

من المعادلات (1.4.1) , (1.4.2) و (1.4.3) ، يكون لدينا :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\alpha_2 \eta p_1 t^{(p_2-1)} f' + \alpha_2 p_2 t^{(p_2-1)} f \qquad \ldots(1.4.4)$$

$$vH(t)x\frac{\partial h}{\partial x} = \alpha_2\alpha_3 v\eta t^{(p_2-1)} f' \qquad \ldots(1.4.5)$$

$$v\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 vt^{(2p_2-2p_1)} f'^2 \qquad \ldots(1.4.6)$$

$$vhH(t) = \alpha_2\alpha_3 vt^{(p_2+p_3)} f \qquad \ldots(1.4.7)$$

$$vh\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 vt^{(2p_2-2p_1)} ff'' \qquad \ldots(1.4.8)$$

$$\frac{\rho g}{6\mu}\sin(\beta)\frac{\partial h}{\partial x}x^2=\alpha_1\alpha_2\frac{\rho g}{6\mu}\sin(\beta)t^{(p_2+p_1)}\eta^2 f' \qquad \ldots(1.4.9)$$

$$\frac{\rho g}{3\mu}\sin(\beta)hx=\alpha_1\alpha_2\frac{\rho g}{3\mu}\sin(\beta)t^{(p_1+p_2)}\eta f \qquad \ldots(1.4.10)$$

بمقارنة المعادلات (1.4.4) إلى (1.4.10) ، نحصل على :

$$p_1=-1 \quad , \quad p_2=-3 \quad , \quad p_3=-1$$

بتعويض قيم p_1, p_2, p_3 في المعادلات (1.4.4) إلى (1.4.10) ومن ثم تعويض المعادلات الناتجة في (1.3.14) ، نحصل على :

$$ff''+f'^2+2f-2\eta f'+\frac{1}{2}\sin(\beta)\eta^2 f'+\sin(\beta)\eta f=0 \qquad \ldots(1.4.11)$$

يمكن كتابة المعادلة (1.4.11) بالصيغة :

$$d(ff')+2d(\eta f)-4\eta f'+\frac{1}{2}\sin(\beta)d\left(\eta^2 f\right)=0 \qquad \ldots(1.4.12)$$

بتكامل المعادلة (1.4.12) ، نحصل على :

$$ff'+2\eta f-4\int\eta f'+\frac{1}{2}\sin(\beta)\eta^2 f=\lambda \qquad \ldots(1.4.13)$$

حيث أن : λ ثابت التكامل .

وللحصول على الشروط الابتدائية للمعادلة (1.4.11) ، نضع $\left(f'=0\right)$ في المعادلة (1.4.13) ، فنحصل على :

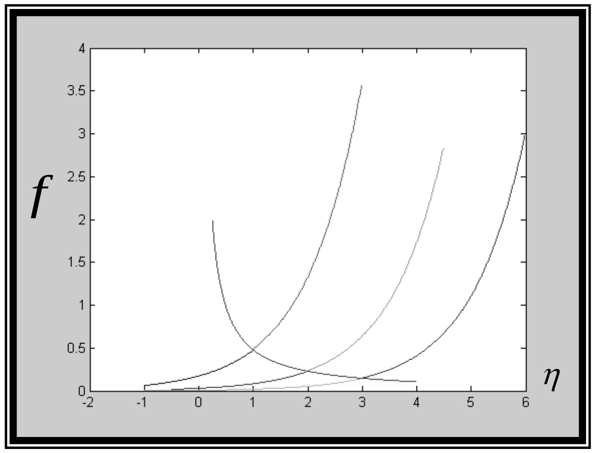
$$f=\frac{\lambda}{2\eta+\frac{1}{2}\sin(\beta)\eta^2} \qquad \ldots(1.4.14)$$

باستخدام برنامج (MATLAB) وطريقة (رانج – كوتا) من الرتبة الرابعة تم حل المعادلة (1.4.11) عددياً عندما :

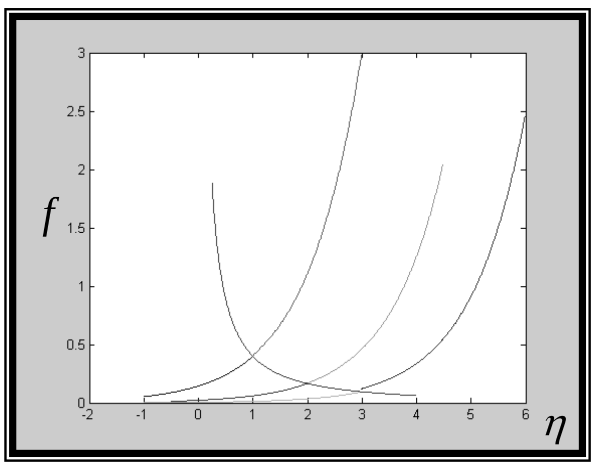
$$\lambda=1 \quad , \quad \beta=\frac{\pi}{18} \quad , \quad \beta=\frac{\pi}{2}$$

وكما موضح في الشكل (1-2) .

$\beta = \frac{\pi}{18}$



$\beta = \frac{\pi}{2}$



الشكل (2-1)

يمثل منحنيات الحلول للمستوي (η, f) للمعادلة (1.4.11) وللزوايا أعلاه

(1-5) الاستنتاجات Conclusion :

في هذا البحث تمت دراسة الجريان اللازمني في غشاء رقيق متناظر مائل بزاوية β في نظام ثنائي البعد بعد إهمال قوى القصور الذاتي وجهد القص على سطح الغشاء وتبين من حلول المعادلات (1-4-11) وكما موضحة في الشكل (1-2) أن سمك الغشاء يتناقص بازدياد زاوية الميل ولكن يزداد سمك الغشاء بازدياد المتغير η .

المصادر

[1] Abdul Ahad, J.G. (1994) "Similarity solution for unsteady flow thin liquid films", **J. Ed. Sci.**, Vol. 17.

[2] B.R. Duffy and S.K. Wilson (1997) "A third–order deferential equation arising in thin–film flows and relevant to Tanner's Law", **App. Math. Lebb**, Vol. 10, No. 3, PP. 63–68.

[3] Javier, A. (2000) "Global models for moving contact lines", **Physical Reviews**, Vol. 63, 011208, PP. 1–13.

[4] Khdur, M.S. (2003) "Viscous flow in certain inclined thin liquid films", M. Sc. Thesis , Iraq , **University of Mosul**.

[5] Morshed, A.M. (1996) "Fluid flow in thin liquid films", M.Sc. Thesis, Iraq , **University of Mosul**.

[6] Mustafa, H.S.(2003) "Study and unsteady flow in thin liquid film inclined with an angle ", M. Sc. Thesis , Iraq , **University of Mosul**.