

## Finite Differences Methods for solving Korteweg-de Vries-Burger's Equation

Ekhlash S. Al-Rawi

Almutasim Albaker

drekhlass-alrawi@uomosul.edu.iq

College of Computer Sciences and Mathematics

University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 05/12/2010

Accepted on: 16/03/2011

## ABSTRACT

In this paper we solved the Korteweg-de Vries-Burger's equation numerically by finite difference methods, using two different schemes which are the Fully Implicit scheme and the Exponential finite difference scheme, because of the existence of the third derivative in the equation we suggested a treatment for the numerical solution by parting the mesh grid into five regions, the first region represents the first boundary condition, the second one at the grid point  $x_1$ , while the third represents the grid points  $x_2, x_3, \dots, x_{n-2}$ , the fourth represents the grid point  $x_{n-1}$  and the fifth is for the second boundary condition.

We also studied the numerical stability, using Fourier (Von-Neumann) method for the two schemes which used in the solution on all mesh points to ensure the stability of the point which had been treated in the suggested style. Numerical results obtained by using these schemes are compared with existing analytical results. Excellent agreement was found between the exact solution and approximate solutions obtained by these schemes. The obtained approximate numerical solutions maintain good accuracy compared with exact solution specially for small values of the viscosity parameter.

**Keywords:** finite difference methods; Fully Implicit scheme; Exponential finite difference scheme; Fourier (Von-Neumann) method; Korteweg-de Vries-Burger's equation.

## طرائق الفروقات المنتهية لحل معادلة Korteweg-de Vries-Burger's

المعتصم البكر

إخلاص سعد الله الراوي

كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 16 / 3 / 2011

تاريخ استلام البحث: 5 / 12 / 2010

## الملخص

في هذا البحث تم حل معادلة Korteweg-de Vries-Burger's بطريقتين من طرائق الفروقات المنتهية وهما الطريقة الضمنية الكاملة وطريقة الفروقات المنتهية الأسية. ولكون المعادلة تحتوي على المشتقة الثالثة فقد تم اقتراح معالجة للحل العددي وذلك بتجزئة نقاط المشبك إلى خمس مناطق الأولى الشرط الحدودي الأول والثانية عند نقطة المشبك  $x_1$  والثالثة نقاط المشبك  $x_2, x_3, \dots, x_{n-2}$  والرابعة نقطة المشبك  $x_{n-1}$  والخامسة الشرط الحدودي الثاني. كما تمت دراسة الاستقرار العددية بطريقة Fourier (Von-Neumann) للطريقتين وعلى كافة نقاط المشبك للتأكد من استقرارية النقاط التي تمت معالجتها بالأسلوب المقترح. وقد تمت مقارنة النتائج العددية التي تم الحصول عليها باستخدام تلك الطرائق مع نتائج الحل المضبوط، ووجد تقارباً ممتازاً بين الحل التحليلي والحلول العددية للطريقتين. الحلول العددية التي تم الحصول عليها تحافظ على دقة جيدة عندما تكون قيمة معلمة اللزوجة صغيرة.

**الكلمات المفتاحية:** طرق الفروقات المنتهية؛ الطريقة الضمنية الكاملة؛ وطريقة الفروقات المنتهية الأسية؛ طريقة فورييه (فون نيومان)؛ معادلة Korteweg-de Vries-Burger.

## 1. المقدمة:

درس العديد من الباحثين معادلة Korteweg-de Vries-Burger وتكتب اختصاراً (KdV-B). تشكل هذه المعادلة نموذج الانتشار (Dispersion) والتبدد (أو التشتيت Dissipation) وغير الخطي [2]. من

المعروف جيداً أن الكثير من الظواهر الفيزيائية الطبيعية يمكن أن توصف باستخدام هذه المعادلة. من الأمثلة التطبيقية على المعادلة، شروط سلوك الموجات الطويلة في الماء والموجات السطحية في البلازما. كما أنها تلائم نمط موجة لا خطية لمائع في أنبوب مطاطي، والمائع مضطرب بفعل فقاعات صغيرة تتحرك بداخله. هذه المعادلة تعتبر تعميم ذو بعد واحد للوصف النموذجي لحقول السرعة والكثافة اللذان يأخذان في الحسبان قوة الضغط بالإضافة إلى اللزوجة والتفرق، قد تكون معادلة KdV-B أداة أكثر مرونة للفيزيائيين من معادلة Burger [7]. تم في [1] حل معادلة KdV-B باستخدام تكنيك الفروقات المنتهية الأسية Exponential Finite Difference وتم اختبار دقة الحلول المحسوبة وذلك بمقارنته مع حلول عددية ووجد أن التقنية ذات كفاءة في حل معادلة Korteweg-de Vries عندما يكون الزمن صغيراً. في [2] قدم الباحث حلول عددية لمعادلة KdV-Burger باستخدام متعددات حدود Bernstein المعدلة.

في هذا البحث قمنا بحل معادلة KdV-Burger باستخدام طريقتين من طرائق الفروقات المنتهية هما الطريقة الأسية والطريقة الضمنية الكاملة، سيتم معالجة الطريقتين لإيجاد الحل لهذه المعادلة بسبب احتوائها على المشتقة الثالثة في حدودها ومقارنة النتائج مع الحل التحليلي. أيضاً سيتم دراسة تحليل استقرارية الحل العددي لكل من الطريقتين.

## 2. النموذج الرياضي:

إن صيغة معادلة Korteweg-de Vries – Burger تكون بالشكل الآتي: [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \dots(1)$$

حيث أن  $\mu, \nu, \varepsilon$  معاملات ثابتة والشروط الابتدائية هو

$$u(x,0) = u_0(x)$$

والشروط الحدودية هي

$$\left. \begin{aligned} u(a,t) = \beta_1, \quad u(b,t) = \beta_2 & \quad , t \geq 0 \\ u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0 & \quad , t \geq 0 \\ u_{xx}(a,t) = u_{xx}(b,t) = 0 & \quad , t \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

وأن  $u_0(x)$  هي دالة مقيدة. والمعادلة (2) تمثل الشروط الحدودية عند نهايتي الفترة [a,b] المراد إيجاد الحل العددي عندها. الحد الثاني من المعادلة (1) يمثل الحد غير الخطي، والحد الثالث يمثل خاصية الانتشار والأخير يمثل التفريق أو التبديد. وكحالات محددة لمعادلة KdV-B تصبح معادلة KdV عندما تكون  $\nu \rightarrow 0$  ومعادلة Burger عندما  $\mu \rightarrow 0$ .

## 3. الحل العددي:

كون المعادلة تحوي في حدودها المشتقة الثالثة لذلك سيتم اتباع أسلوب جديد في الحل العددي وكما يأتي:

### 1-3 اشتقاق صيغة الطريقة الضمنية الكاملة (Fully Implicit scheme) لمعادلة KdV-Burger's:

تسمى هذه الطريقة بالطريقة الضمنية الكاملة كون النقاط المراد إيجاد الحل عندها في المستوى  $(j+1)$  يتم إيجادها بدلالة نقطة واحدة في المستوى  $(j)$  هي  $u_i^j$ ، وتعد هذه الطريقة من الطرق التي تتميز بدقة عالية غير أن

هذه الطريقة تحتاج إلى حل منظومة معادلات خطية من سعة  $(n \times m)$  عند كل مستوى نتقدم فيه بالحل. [3] وكما يلي:

باستخدام تقريبات الفروق التقدمة كما مبين في أدناه:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + \varepsilon u_i^j \left[ \frac{-3u_i^{j+1} + 4u_{i+1}^{j+1} - u_{i+2}^{j+1}}{2h} \right] - v \left[ \frac{2u_i^{j+1} - 5u_{i+1}^{j+1} + 4u_{i+2}^{j+1} - u_{i+3}^{j+1}}{h^2} \right] + \mu \left[ \frac{-5u_i^{j+1} + 18u_{i+1}^{j+1} - 24u_{i+2}^{j+1} + 14u_{i+3}^{j+1} - 3u_{i+4}^{j+1}}{2h^3} \right] = 0$$

نجد  $u_1^{j+1}$  عند النقطة  $X_1$ ، وبضرب المعادلة بـ  $k$  ونقل عناصر المستوى  $(j+1)$  في الطرف الأيسر وعناصر المستوى  $j$  في الطرف الأخر وبفرض  $r = \frac{k}{h^2}$  وتبسيط المعادلة نحصل على:

$$\left[ 1 - \frac{3rh}{2} \varepsilon u_1^j - 2rv - \frac{5r}{2h} \mu \right] u_1^{j+1} + \left[ 2rh\varepsilon u_1^j + 5rv + \frac{9r}{h} \mu \right] u_2^{j+1} + \left[ -\frac{rh}{2} \varepsilon u_1^j - 4rv - \frac{12r}{h} \mu \right] u_3^{j+1} + \left[ rv + \frac{7r}{h} \mu \right] u_4^{j+1} - \frac{3r}{2h} \mu u_5^{j+1} = u_1^j \quad \dots(3)$$

أما بقية الحلول  $u_i^{j+1}$  عند النقاط  $X_i$  حيث  $i=2, \dots, n-2$  فيتم إيجادها من تقريبات الفروق المركزية:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + \varepsilon u_i^j \left[ \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} \right] - v \left[ \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right] + \mu \left[ \frac{u_{i+2}^{j+1} - 2u_{i+1}^{j+1} + 2u_{i-1}^{j+1} - u_{i-2}^{j+1}}{2h^3} \right] = 0$$

بعد التبسيط تصبح المعادلة أعلاه بالشكل التالي:

$$-\frac{r\mu}{2h} u_{i-2}^{j+1} + \left[ -\frac{rh\varepsilon}{2} u_i^j - rv + \frac{r\mu}{h} \right] u_{i-1}^{j+1} + [1 + 2rv] u_i^{j+1} + \left[ \frac{rh\varepsilon}{2} u_i^j - rv - \frac{r\mu}{h} \right] u_{i+1}^{j+1} + \frac{r}{2h} \mu u_{i+2}^{j+1} = u_i^j \quad \dots(4)$$

المعادلة (4) تمثل تقريب الفروقات المنتهية بالطريقة الضمنية لمعادلة KdV-Burger's عند قيم  $X_i$  حيث  $i = 2, \dots, n-2$

أما لإيجاد  $u_{n-1}^{j+1}$  فتحسب من تقريبات الفروق التراجعية وكما يلي :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} + \varepsilon u_i^j \left[ \frac{3u_i^{j+1} - 4u_{i-1}^{j+1} + u_{i-2}^{j+1}}{2h} \right] - v \left[ \frac{2u_i^{j+1} - 5u_{i-1}^{j+1} + 4u_{i-2}^{j+1} - u_{i-3}^{j+1}}{h^2} \right] + \mu \left[ \frac{5u_i^{j+1} - 18u_{i-1}^{j+1} + 24u_{i-2}^{j+1} - 14u_{i-3}^{j+1} + 3u_{i-4}^{j+1}}{2h^3} \right] = 0$$

وعليه نحصل على المعادلة:

$$\left[ 1 + \frac{3rh\varepsilon}{2} u_{n-1}^j - 2rv + \frac{5r\mu}{2h} \right] u_{n-1}^{j+1} + \left[ -2rh\varepsilon u_{n-1}^j + 5rv - \frac{9r\mu}{h} \right] u_{n-2}^{j+1} + \left[ \frac{rh\varepsilon}{2} u_{n-1}^j - 4rv + \frac{12r\mu}{h} \right] u_{n-3}^{j+1} + \left[ rv - \frac{7r\mu}{h} \right] u_{n-4}^{j+1} + \frac{3r\mu}{2h} u_{n-5}^{j+1} = u_{n-1}^j \quad \dots(5)$$

المعادلتان (3) و (5) تستخدمان لإيجاد الحل في الطريقة الضمنية عند النقطتين  $X_1$  و  $X_{n-1}$  على الترتيب، وبعد إيجاد الحل عند الشروط الحدودية نحصل على النظام الخطي الخماسي الأقطار التالي:

$$\begin{bmatrix} (1+2vr+\frac{15r\mu}{h}) & (-2rv-\frac{16r\mu}{h}) & (\frac{r\mu}{2h}) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & (1-\frac{3rh\varepsilon}{2}u_i^j-2rv-\frac{5r\mu}{2h}) & (2rh\varepsilon u_i^j+5rv+\frac{9r\mu}{h}) & (-\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j-4rv-\frac{12r\mu}{h}) & (rv+\frac{7r\mu}{h}) & (-\frac{3r\mu}{2h}) & \dots & \dots \\ (-\frac{r\mu}{2h}) & (-\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j-rv+\frac{r\mu}{h}) & (1+2rv) & (\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j-rv-\frac{r\mu}{h}) & (\frac{r\mu}{2h}) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & (-\frac{r\mu}{2h}) & (-\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j-rv+\frac{r\mu}{h}) & (1+2rv) & (\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j-rv-\frac{r\mu}{h}) & (\frac{r\mu}{2h}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & (-\frac{r\mu}{2h}) & (-\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j-rv+\frac{r\mu}{h}) & (1+2rv) & (\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j-rv-\frac{r\mu}{h}) & (\frac{r\mu}{h}) & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (-\frac{r\mu}{2h}) & (-\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j-rv+\frac{r\mu}{h}) & (1+2rv) & (\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j-rv-\frac{r\mu}{h}) & (\frac{r\mu}{2h}) \\ 0 & \dots & (\frac{3r\mu}{2h}) & (rv-\frac{7r\mu}{h}) & (\frac{rh\varepsilon}{2}u_{n-1}^j-4rv+\frac{12r\mu}{h}) & (-2rh\varepsilon u_{n-1}^j+5rv-\frac{9r\mu}{h}) & (1+\frac{3rh\varepsilon}{2}u_{n-1}^j-2rv+\frac{5r\mu}{2h}) & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (-\frac{r\mu}{h}) & (-2rv+\frac{16r\mu}{h}) & (1+2vr-\frac{15r\mu}{h}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^{j+1} \\ u_1^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-2}^{j+1} \\ u_{n-1}^{j+1} \\ \vdots \\ u_n^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^j \\ u_1^j \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-2}^j \\ u_{n-1}^j \\ \vdots \\ u_n^j \end{bmatrix}$$

$$\forall j = 1, 2, 3, \dots, m$$

النظام الخطي أعلاه يمكن إيجاد الحل له باستخدام الطرائق المباشرة (Direct Methods) أو الطرائق التكرارية (Iterative Methods) لقد تم استخدام إحدى الطرق المباشرة وهي طريقة حذف كاوس (Gaussian Elimination Method).

### 2-3 تحليل الاستقرار لطريقة الفروقات المنتهية الضمنية الكاملة:

باستخدام طريقة (Von-Neumann) Fourier نقوم بدراسة الاستقرار العددية لطريقة الفروقات المنتهية الضمنية الكاملة لمعادلة KdV-Burger وكما يلي :

عند العقدة الثانية عندما  $n=2$  نستخدم المعادلات الفرقية التالية:

$$\frac{u_{n,m+1}-u_{n,m}}{k} - \frac{v}{2} \left[ \frac{2u_{n,m+1}-5u_{n+1,m+1}+4u_{n+2,m+1}-u_{n+3,m+1}}{h^2} \right] + \frac{\mu}{2} \left[ \frac{-5u_{n,m+1}+18u_{n+1,m+1}-24u_{n+2,m+1}+14u_{n+3,m+1}-3u_{n+4,m+1}}{2h^3} \right] = 0, n=2 \quad \dots(6)$$

وبعد التعويض عن  $u_n^m$  بـ  $\psi(t).e^{i\alpha x}$  في المعادلة (6) وضرب طرفي المعادلة بـ  $\frac{k}{e^{i\alpha x}}$  وفرض أن  $r = \frac{k}{h^2}$  نحصل على:

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \frac{1}{1-\frac{v.r}{2} \left[ 2-5e^{i\alpha h}+4e^{2i\alpha h}-e^{3i\alpha h} \right] + \frac{\mu.r}{2.h} \left[ -5+18e^{i\alpha h}-24e^{2i\alpha h}+14e^{3i\alpha h}-3e^{4i\alpha h} \right]}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{1-\frac{v.r}{2} \left[ 2-5e^{i\alpha h}+4e^{2i\alpha h}-e^{3i\alpha h} \right] - \frac{\mu.r}{2.h} \left[ 5-18e^{i\alpha h}+24e^{2i\alpha h}-14e^{3i\alpha h}+3e^{4i\alpha h} \right]}$$

للتبسيط نستخدم مبرهنة مفكوك ذي الحدين

$$\Rightarrow = \frac{1}{1-v.r \left[ (1-e^{i\alpha h})^3 + (1-e^{i\alpha h})^2 \right] - \frac{\mu.r}{2.h} \left[ 3(1-e^{i\alpha h})^4 + 2(1-e^{i\alpha h})^3 \right]}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{1+r.(1-e^{i\alpha h})^3.(-v-\frac{\mu}{h})+r.(1-e^{i\alpha h})^2.(-v-\frac{3.\mu}{2.h}(1-e^{i\alpha h})^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \frac{1}{1-r.Y(1-e^{i\alpha h})^3+r.(1-e^{i\alpha h})^2.(-v-Z(1-e^{i\alpha h})^2)} \quad \dots(7)$$

حيث  $Y = (v + \frac{\mu}{h})$  و  $Z = \frac{3.\mu}{2.h}$  وتبسيط المعادلة (7) نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \frac{1}{A+i.B} = \xi \quad \dots(8)$$

حيث

$$A = 1 - 8.r.Y.\sin^6\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + 6.r.Y.\sin^2(\alpha h).\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + 24.r.Z.\sin^2(\alpha h).\sin^4\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - 16.r.Z.\sin^8\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - 4.r.v.\sin^4\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + v.r.\sin^2(\alpha h) - r.Z.\sin^4(\alpha h)$$

$$B = \sin(\alpha h).[12.r.Y.\sin^4\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - r.Y.\sin^2(\alpha h) + 4.r.v.\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + 32.r.Z.\sin^6\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - 8.r.Z.\sin^2(\alpha h).\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)]$$

لبعض قيم  $\alpha h$  تكون  $\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)$  قيمتها واحد وبفرض أن  $\sin^2 \beta k$  تأخذ أكبر قيمة (يعني واحد) [8] و ثم التعويض عن قيمة كل من  $Z$  و  $Y$  نحصل على:

$$A = 1 + r.(-5.v + \frac{17.\mu}{2.h})$$

$$B = r.\sin(\alpha h).(15.v + \frac{47.\mu}{h})$$

باستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية

$$\left| \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} \right| = |\xi| \leq 1$$

عليه من المعادلة (8) ينتج:

$$|\xi| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2.r(-5.v + \frac{17.\mu}{2.h}) + r^2(-5.v + \frac{17.\mu}{2.h})^2 + r^2(15.v + \frac{47.\mu}{h})^2}} \quad \dots(9)$$

من الواضح أن  $\sqrt{A^2 + B^2} \geq 1$  عليه نحصل على تحقيق الشرط أن  $|\xi| \leq 1$ .

أما لدراسة استقرارية الحلول عند العقد  $n=3, \dots, p-2$  نستخدم المعادلات الفرقية التالية:

$$\frac{u_{n,m+1} - u_{n,m}}{k} - \frac{v}{2} \left[ \frac{u_{n+1,m+1} - 2u_{n,m+1} - u_{n-1,m+1}}{h^2} \right] + \frac{\mu}{2} \left[ \frac{u_{n+2,m+1} - 2u_{n+1,m+1} + 2u_{n-1,m+1} - u_{n-2,m+1}}{2.h^3} \right] = 0 \quad , n = 3, \dots, p-2 \quad \dots(10)$$

وبعد التعويض عن  $u_n^m$  بـ  $\psi(t).e^{i\alpha x}$  في المعادلة (10) وفرض أن  $r = \frac{k}{h^2}$  نحصل على:

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \frac{1}{1-v.r[e^{i\alpha h} - 2 + e^{-i\alpha h}] + \frac{\mu.r}{2.h}[e^{2i\alpha h} - 2e^{i\alpha h} + 2e^{-i\alpha h} - e^{-2i\alpha h}]}$$

$$= \frac{1}{1 - v.r.[2.\cos(\alpha h) - 2] + \frac{r.\mu}{2.h}[2.i.\sin(2\alpha h) - 4.i.\sin(\alpha h)]}$$

$$= \frac{1}{1 + 4v.r.\sin^2(\alpha h) - \frac{2.i.r.\mu}{h}.(1 - \cos(\alpha h))\sin(\alpha h)}$$

ومن المعادلة أعلاه نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \frac{1}{1 + 4v.r.\sin^2(\alpha h) - \frac{2.i.r.\mu}{h}.\sin^2(\alpha h)\sin(\alpha h)} = \frac{1}{A + i.B} = \xi \quad \dots(11)$$

باستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية

$$\left| \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} \right| = |\xi| \leq 1$$

أي أن

$$|\xi| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 8.r.v.\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + 16.r^2.v^2.\sin^4\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + \frac{16.r^2.\mu^2}{h^2}.\sin^4\left(\frac{\alpha h}{2}\right).\sin^2(\alpha h)}}$$

وبما أن لبعض قيم  $\alpha h$  تكون  $\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)$  قيمتها واحد وبفرض أن  $\sin^2 \beta k$  تأخذ أكبر قيمة (يعني واحد)

ينتج:

$$\frac{1}{A^2 + B^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + 8.r.v + 16.r^2.v^2 + \frac{16.r^2.\mu^2}{h^2}}} \quad \dots(12)$$

من الواضح إن

$$\sqrt{1 + 8.r.v + 16.r^2.v^2 + \frac{16.r^2.\mu^2}{h^2}} \geq 1$$

عليه فإن الشرط  $|\xi| \leq 1$  يتحقق.

الآن عندما  $n=p-1$  نستخدم المعادلات الفرقية التالية لأجل دراسة استقرارية الحل عند هذه العقدة

$$\frac{u_{n,m+1} - u_{n,m}}{k} - \frac{v}{2} \left[ \frac{2.u_{n,m+1} - 5.u_{n-1,m+1} + 4.u_{n-2,m+1} - u_{n-3,m+1}}{h^2} \right]$$

$$+ \frac{\mu}{2} \left[ \frac{5.u_{n,m+1} - 18.u_{n-1,m+1} + 24.u_{n-2,m+1} - 14.u_{n-3,m+1} + 3.u_{n-4,m+1}}{2.h^3} \right] = 0, n = p-1 \quad \dots(13)$$

نعوض عن  $u_n^m$  بـ  $\psi(t).e^{i\alpha x}$  في المعادلة (13) وفرض أن  $r = \frac{k}{h^2}$  نحصل على :

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \frac{1}{1 - \frac{v.r}{2} \left[ 2 - 5e^{-i\alpha h} + 4e^{-2i\alpha h} - e^{-3i\alpha h} \right] + \frac{\mu.r}{2.h} \left[ 5 + 18e^{-i\alpha h} + 24e^{-2i\alpha h} - 14e^{-3i\alpha h} + 3e^{-4i\alpha h} \right]}$$

باستخدام مبرهنة مفكوك ذي الحدين

$$\Rightarrow = \frac{1}{1 + r.(1 - e^{-i\alpha h})^3 . (-v + \frac{\mu}{h}) + r.(1 - e^{-i\alpha h})^2 . (-v + \frac{3.\mu}{2.h} (1 - e^{-i\alpha h})^2)}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{1 - r.N(1 - e^{i\alpha h})^3 + r.(1 - e^{i\alpha h})^2 . (-v + Z(1 - e^{i\alpha h})^2)} \quad \dots(14)$$

حيث  $Z = \frac{3 \cdot \mu}{2 \cdot h}$  و  $N = (-v + \frac{\mu}{h})$  وتبسيط المعادلة (14) بالصيغة التالية:

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \frac{1}{A+i.B} = \xi \quad \dots(15)$$

حيث

$$A = 1 + 8 \cdot r \cdot N \cdot \sin^6\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - 6 \cdot r \cdot N \cdot \sin^2(\alpha h) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - 24 \cdot r \cdot Z \cdot \sin^2(\alpha h) \cdot \sin^4\left(\frac{\alpha h}{2}\right) \\ + 16 \cdot r \cdot Z \cdot \sin^8\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - 4 \cdot r \cdot v \cdot \sin^4\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + v \cdot r \cdot \sin^2(\alpha h) + r \cdot Z \cdot \sin^4(\alpha h) \\ B = r \cdot \sin(\alpha h) \cdot [12 \cdot N \cdot \sin^4\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - N \cdot \sin^2(\alpha h) - 4 \cdot v \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + 32 \cdot Z \cdot \sin^6\left(\frac{\alpha h}{2}\right) - 8 \cdot Z \cdot \sin^2(\alpha h) \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)]$$

لبعض قيم  $\alpha h$  تكون  $\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)$  قيمتها واحد وبفرض أن  $\sin^2 \beta k$  تأخذ أكبر قيمة (يعني واحد) وبالتعويض عن قيمة كل من  $Z$  و  $N$  نحصل على:

$$A = 1 - r \cdot (5 \cdot v + \frac{17 \cdot \mu}{2 \cdot h}), \quad B = r \cdot \sin(\alpha h) \cdot (-15 \cdot v + \frac{47 \cdot \mu}{h})$$

وباستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية، عليه من المعادلة (15) ينتج

$$|\xi| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cdot r \cdot (5v + \frac{17 \cdot \mu}{2 \cdot h}) + r^2 (5v + \frac{17 \cdot \mu}{2 \cdot h})^2 + r^2 (-15v + \frac{47 \cdot \mu}{h})^2}} \leq 1$$

إذاً  $|\xi| \leq 1$  عليه فإن الطريقة الضمنية الكاملة (Fully-Implicit Method) تكون مستقرة بدون شرط (unconditionally stable) عند جميع نقاط المشبك.

### 3-3 اشتقاق صيغة طريقة الفروقات المنتهية الأسية Exponential Finite Difference Scheme لمعادلة KdV-Burger's:

قدم هذه الطريقة لأول مرة العالم Bhattacharya في عام 1985 للحالة غير المستقرة في البعد الواحد للتوصيل الحراري في الإحداثيات الديكارتية . بعد ذلك طور خوارزمية الطريقة Robert F. Handschuh لحل معادلة الانتشار ذات البعد الواحد في الإحداثيات الأسطوانية وقام بتطبيقها على مسألة ذات بعدين وثلاثة أبعاد. وتستعمل الطريقة أيضاً لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية في بعد واحد وبعدين للإحداثيات الديكارتية. [5, 6]

سيتم اشتقاق صيغة الفروقات المنتهية الأسية لحل معادلة KdV-Burger's وكما يلي:

نفرض أن  $F(u)$  ترمز لأي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق، بضرب المعادلة (1) بمشتقة  $F$  ينتج:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = F'(u) \left( -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad \dots(16)$$

وهذا يؤدي إلى

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F'(u) \left( -\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad \dots(17)$$

باستخدام الفروقات التقدمة الاعتيادية وتعويضها عن  $\frac{\partial F}{\partial t}$  نحصل على معادلة الفروقات التي تمثل

المعادلة الآتية:

$$F(u_i^{j+1}) = F(u_i^j) + k F'(u_i^j) \left[ -\varepsilon u_i^j \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j - \mu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j \right] \quad \dots(18)$$

إذ أن  $k$  يمثل مقدار خطوة الزمن. والآن لو فرضنا أن  $F(u) = \ln u$  فسوف نحصل على صيغة الفروقات الأسية (Exponential Finite-Difference Formula) وكما يلي:

$$u_i^{j+1} = u_i^j \exp \left\{ \frac{k}{u_i^j} \left[ -\varepsilon u_i^j \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j - \mu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j \right] \right\} \quad \dots(19)$$

لغرض تقادي وجود نقاط واقعة خارج حدود شبكة الحل كما في الطريقة السابقة نوضح الآن المعالجة الخاصة بها عند استخدام طريقة الفروقات المنتهية للمشتقات وحسب الصيغ الآتية:  
عندما  $i=1$  نستخدم صيغ الفروقات التقدمة التالية:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j &= \frac{-3u_i^j + 4u_{i+1}^j - u_{i+2}^j}{2h} \\ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j &= \frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2} \\ \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j &= \frac{-5u_i^j + 18u_{i+1}^j - 24u_{i+2}^j + 14u_{i+3}^j - 3u_{i+4}^j}{2h^3} \end{aligned}$$

ونعوضها في المعادلة (19) ليتم الحصول على الحل  $u_i^{j+1}$  عند النقطة  $x_1$ .

ولحساب الحل  $u_i^{j+1}$  عندما  $i=2,3,\dots,n-2$  نستخدم المعادلات الفرقية المركزية

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j &= \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \\ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j &= \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \\ \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j &= \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2h^3} \end{aligned}$$

وأخيراً عندما  $i=n-1$  نعوض كل صيغ تقريبات الفروقات التراجعية في المعادلة (19) للحصول على الحل

$u_{n-1}^{j+1}$  عند النقطة  $x_{n-1}$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j &= \frac{3u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j}{2h} \\ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j &= \frac{2u_i^j - 5u_{i-1}^j + 4u_{i-2}^j - u_{i-3}^j}{h^2} \\ \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j &= \frac{5u_i^j - 18u_{i-1}^j + 24u_{i-2}^j - 14u_{i-3}^j + 3u_{i-4}^j}{2h^3} \end{aligned}$$

أما لغرض إيجاد الحل عند الشروط الحدودية نأخذ عندما  $i=0$  من الشرط الحدودي الأول نحصل على

$$u_1^j = u_{-1}^j \quad \dots(20)$$

وعندما  $i=n$  نحصل على

$$u_{n+1}^j = u_{n-1}^j \quad \dots(21)$$

وبالنسبة للشرط الحدودي الثاني عندما  $i=0$  نحصل على:

$$u_{-2}^j = 32u_1^j - 30u_0^j - u_2^j \quad \dots(22)$$

وعندما  $i=n$  نحصل على

$$u_{n+2}^j = 32 u_{n-1}^j - 30 u_n^j - u_{n-2}^j \quad \dots(23)$$

نعوض كل من المعادلتين (20) و(22) في المعادلة (19) عندما  $i=0$  لنحصل على المعادلة (24) بعد التبسيط:

$$u_0^{j+1} = u_0^j \exp \left\{ \frac{k}{u_0^j} \left[ v \left( \frac{2.u_1 - 2.u_0}{h^2} \right) - \mu \left( \frac{32.u_2 - 2.u_1 - 30.u_0}{2.h^3} \right) \right] \right\} \quad \dots(24)$$

وتعويض كل من المعادلتين (21) و(23) في المعادلة (19) عندما  $i=n$  لنحصل على:

$$u_n^{j+1} = u_n^j \exp \left\{ \frac{k}{u_n^j} \left[ v \left( \frac{2.u_{n-1} - 2.u_n}{h^2} \right) - \mu \left( \frac{32.u_{n-1} - 2.u_{n-2} - 30.u_n}{2.h^3} \right) \right] \right\} \quad \dots(25)$$

### 4-3 تحليل الاستقرار لطريقة الفروقات المنتهية الأسية باستخدام طريقة Fourier (Von-Neumann):

نستخدم المعادلة (19) التي حصلنا عليها من اشتقاق الطريقة :

$$u_n^{m+1} = u_n^m \cdot \exp \left\{ \frac{k}{u_n^m} \left[ -\varepsilon u_n^m \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_n^m + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_n^m - \mu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_n^m \right] \right\}$$

بحذف الجزء غير الخطي من المعادلة (19) يكون لدينا:

$$u_n^{m+1} = u_n^m \cdot \exp \left\{ \frac{k}{u_n^m} \left[ v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_n^m - \mu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_n^m \right] \right\} \quad \dots(26)$$

الآن باستخدام طريقة Von Neumann method لدراسة الاستقرار العددية نبدأ بالحل عند العقدة

الثانية أي عندما  $n=2$  نستخدم المعادلات الفرقية التالية :

$$u_n^{m+1} = u_n^m \cdot \exp \left\{ \frac{k}{u_n^m} \left[ v \frac{2.u_n^m - 5.u_{n+1}^m + 4.u_{n+2}^m - u_{n+3}^m}{h^2} - \mu \frac{-5.u_n^m + 18.u_{n+1}^m - 24.u_{n+2}^m + 14.u_{n+3}^m - 3.u_{n+4}^m}{2.h^3} \right] \right\} \quad \dots(27)$$

نعوض عن  $u_n^m$  بـ  $\psi(t).e^{i\alpha x}$  في المعادلة (27) وبعد التبسيط نحصل على :

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \exp \left\{ r.Y.(1 - e^{i\alpha h})^3 + r.(1 - e^{i\alpha h})^2.(v + Z(1 - e^{i\alpha h})^2) \right\}$$

حيث  $r = \frac{k}{h^2}$  و  $Z = \frac{3.\mu}{2.h}$  و  $Y = (v + \frac{\mu}{h})$  وبتبسيط المعادلة أعلاه بنفس الأسلوب المتبع في الطريقة الضمنية

نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = e^{A+i.B} = \xi \quad \dots(28)$$

حيث

$$A = r.(5.v - \frac{17.\mu}{2.h}), \quad B = -r.\sin(\alpha h).(15.v + \frac{47.\mu}{h})$$

باستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرار العددية

$$\left| \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} \right| = |\xi| \leq 1$$

ومن المعادلة (28) نجد أن

$$|\xi| = |\exp\{A+iB\}| = e^A \leq 1$$

عليه تكون  $|\xi| \leq 1$  فقط إذا كانت  $A \leq 0$  أي

$$r.(5.v - \frac{17.\mu}{2.h}) \leq 0$$

بما إن  $r > 0$  دائماً صحيحة عليه يجب أن تكون

$$\begin{aligned} 5.v - \frac{17.\mu}{2.h} \leq 0 &\Rightarrow 5.v \leq \frac{17.\mu}{2.h} \\ \Rightarrow h &\leq \frac{17.\mu}{10.v} \end{aligned} \quad \dots(29)$$

الحالة الثانية يتم دراسة استقرارية الحلول عند العقد  $n=3, \dots, p-2$  باستخدام المعادلات الفرقية التالية:

$$u_{n,m+1} = u_{n,m} \cdot \exp \left\{ \frac{k}{u_{n,m}} \left[ v \cdot \left[ \frac{u_{n+1,m} - 2.u_{n,m} - u_{n-1,m}}{h^2} \right] - \mu \cdot \left[ \frac{u_{n+2,m} - 2.u_{n+1,m} + 2.u_{n-1,m} - u_{n-2,m}}{2.h^3} \right] \right] \right\} \quad \dots(30)$$

نعوض عن  $u_n^m$  بـ  $\psi(t).e^{i\alpha x}$  في المعادلة (30) بعد التبسيط نحصل على:

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \exp \left\{ v.r.(e^{i\alpha h} - 2 + e^{-i\alpha h}) - \frac{\mu.r}{2.h} .(e^{2i\alpha h} - 2.e^{i\alpha h} + 2.e^{-i\alpha h} - e^{-2i\alpha h}) \right\}$$

عليه

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \exp \left\{ v.r.[2.\cos(\alpha h) - 2] - \frac{\mu.r}{2.h} [2.i.\sin(2\alpha h) - 4.i.\sin(\alpha h)] \right\}$$

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \exp \left\{ -4.v.r.\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + \frac{4.\mu.r.i}{h} \sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right).\sin(\alpha h) \right\} = e^{A+iB} = \xi \quad \dots(31)$$

حيث

$$A = -4.v.r.\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right), \quad B = 4\frac{r.i.\mu}{h} \sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\sin(\alpha h)$$

باستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية

$$\left| \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} \right| = |\xi| \leq 1 \Rightarrow |\xi| = |e^{A+iB}| = e^A$$

بما إن  $e^{-4.\mu_2.r.\sin^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)} \leq 1$  صحيحة دائماً عليه فإن  $|\xi| \leq 1$ .

الحالة الثالثة وهي دراسة استقرارية الحل عند العقدة  $n=p-1$  باستخدام المعادلات الفرقية:

$$\begin{aligned} u_{n,m+1} = u_{n,m} \cdot \exp \left\{ \frac{k}{u_{n,m}} \left[ v \cdot \left[ \frac{2.u_{n,m} - 5.u_{n-1,m} + 4.u_{n-2,m} - u_{n-3,m}}{h^2} \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \mu \cdot \left[ \frac{5.u_{n,m} - 18.u_{n-1,m} + 24.u_{n-2,m} - 14.u_{n-3,m} + 3.u_{n-4,m}}{2.h^3} \right] \right] \right\} \quad \dots(32) \end{aligned}$$

نعوض عن  $u_n^m$  بـ  $\psi(t).e^{i\alpha x}$  في المعادلة (32) وتبسيط المعادلة وبفرض أن  $r = \frac{k}{h^2}$  نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \exp \left\{ v.r.[2 - 5e^{-i\alpha h} + 4.e^{-2i\alpha h} - e^{-3i\alpha h}] \right.$$

$$\left. - \mu \cdot \frac{r}{2.h} [5 - 18.e^{-i\alpha h} + 24.e^{-2i\alpha h} - 14.e^{-3i\alpha h} + 3.e^{-4i\alpha h}] \right\}$$

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \exp \left\{ r.(1 - e^{-i\alpha h})^3 .(v - \frac{\mu}{h}) + r.(1 - e^{-i\alpha h})^2 .(v - \frac{3.\mu}{2.h}(1 - e^{-i\alpha h})^2) \right\}$$

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = \exp \left\{ r.Y(1 - e^{-i\alpha h})^3 + r.(1 - e^{-i\alpha h})^2 .(v + Z(1 - e^{-i\alpha h})^2) \right\}$$

حيث  $Z = \frac{3.\mu_3}{2.h}$  و  $Y = (v - \frac{\mu}{h})$  وتبسيط المعادلة أعلاه بنفس الأسلوب المتبع في الطريقة السابقة نحصل على

$$\frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} = e^{A+iB} = \xi \quad \dots(33)$$

حيث

$$A = r \cdot (5.v + \frac{17.\mu}{2.h}), \quad B = r \cdot \sin(\alpha h) \cdot (15.v - \frac{47.\mu}{h})$$

باستخدام الشرط الضروري والكافي للاستقرارية العددية

$$\left| \frac{\psi(t+k)}{\psi(t)} \right| = |\xi| \leq 1$$

من المعادلة (33) نجد أن

$$|\xi| = \left| e^{A+iB} \right| = e^A = e^{r(5.v + \frac{17.\mu}{2.h})} \leq 1$$

بما أن  $r > 0$  دائماً صحيحة عليه فإن

$$5.v + \frac{17.\mu}{2.h} \leq 0$$

$$\Rightarrow h \geq -\frac{17.\mu}{10.v} \quad \dots(34)$$

بما أن خطوة الطول (h) لا يمكن أن تكون سالبة. أي أن المتباينة (34) تؤدي إلى أن  $h > 0$  وهذه صحيحة دوماً.

إذاً طريقة الفروقات المنتهية الأسية Exponential Finite differences لحل معادلة KdV-B تكون مستقرة بدون شرط (unconditionally stable) ضمن نقاط المشبك  $n=3, \dots, p-2$ ، أما عند العقدة الثانية فتكون مستقرة (stable) إذا تم اختيار خطوة الطول h بحيث تحقق القيد في المعادلة (29) أما الخطوة الزمنية (k) فهي غير مشروطة (unconditionally stable) وكذلك الحال عند العقدة  $n=p-1$ .

#### 4. الخوارزميات العددية:

#### 1-4 خوارزمية الطريقة الضمنية الكاملة حسب الأسلوب المقترح:

لإيجاد الحل العددي التقريبي لمعادلة Korteweg-de Vries-Burger's باستخدام الطريقة الضمنية الكاملة نتبع الخطوات التالية:

الإدخال: نقاط نهايات الفترة (a, b)، الشرط الابتدائي، الشروط الحدودية، m, n.

الإخراج: U تمثل الحل التقريبي لـ u عند (x,t).

الخطوة 1: ضع  $h=(b-a)/(n-1)$ ,  $k=0.02$ . حيث

$$x_i = ih, i=0,1,2,\dots,n, \quad t_j = jk, j=0,1,2,\dots,m$$

الخطوة 2: ضع  $r = \frac{k}{h^2}$ .

الخطوة 3: لكل  $j=2,3,\dots,m-1$  ضع  $i=1,2,3,\dots,n-1$

الخطوة 4: إذا  $i = 1$

ضع

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \frac{3rh}{2} \epsilon u_1^j - 2rv - \frac{5r}{2h} \mu \right] u_1^{j+1} + \left[ 2rh \epsilon u_1^j + 5rv + \frac{9r}{h} \mu \right] u_2^{j+1} + \left[ -\frac{rh}{2} \epsilon u_1^j - 4rv - \frac{12r}{h} \mu \right] u_3^{j+1} \\ & + \left[ rv + \frac{7r}{h} \mu \right] u_4^{j+1} - \frac{3r}{2h} \mu u_5^{j+1} = u_1^j \end{aligned}$$

ما عدا ذلك إذا  $i=2,3,\dots,n-2$  ضع

$$-\frac{r\mu}{2h}u_{i-2}^{j+1} + \left[ -\frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j - rv + \frac{r\mu}{h} \right] u_{i-1}^{j+1} + [1+2rv]u_i^{j+1} + \left[ \frac{rh\varepsilon}{2}u_i^j - rv - \frac{r\mu}{h} \right] u_{i+1}^{j+1} + \frac{r}{2h}\mu u_{i+2}^{j+1} = u_i^j$$

ما عدا ذلك إذا  $i=n-1$  ضع

$$\left[ 1 + \frac{3rh\varepsilon}{2}u_{n-1}^j - 2rv + \frac{5r\mu}{2h} \right] u_{n-1}^{j+1} + \left[ -2rh\varepsilon.u_{n-1}^j + 5rv - \frac{9r\mu}{h} \right] u_{n-2}^{j+1} + \left[ \frac{rh\varepsilon}{2}u_{n-1}^j - 4rv + \frac{12r\mu}{h} \right] u_{n-3}^{j+1} + \left[ rv - \frac{7r\mu}{h} \right] u_{n-4}^{j+1} + \frac{3r\mu}{2h}u_{n-5}^{j+1} = u_{n-1}^j$$

الخطوة 5: نجد الحل لنظام المعادلات الخماسي الأقطار باستخدام طريقة حذف كاوس.

الخطوة 6: أخرج الحل التقريبي  $U$  لـ  $u$ .

الخطوة 7: توقف.

#### 2-4 خوارزمية صيغة طريقة الفروق المنتهية الأسية حسب الأسلوب المقترح:

لإيجاد الحل العددي التقريبي لمعادلة Korteweg-de Vries-Burger's باستخدام طريقة الفروق

المنتهية الأسية نتبع الخطوات التالية:

الإدخال: نقاط نهايات الفترة  $(a,b)$ ، الشرط الابتدائي، الشروط الحدودية  $m, n$ .

الإخراج:  $U$  تمثل الحل التقريبي لـ  $u$  عند  $(x,t)$ .

الخطوة 1: ضع  $h=(b-a)/(n-1), k=0.02$ .

حيث

$$x_i=ih, i=0,1,2,\dots,n, \quad ; \quad t_j=jk, j=0,1,2,\dots,m$$

الخطوة 2: ضع  $r = \frac{k}{h^2}$ .

الخطوة 3: لكل  $j=2,3,\dots,m-1$ ، ضع  $i=1,2,3,\dots,n-1$

الخطوة 4: نحسب الحل التقريبي من المعادلة :

$$u_i^{j+1} = u_i^j \exp \left\{ \frac{k}{u_i^j} \left[ -\varepsilon u_i^j \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j - \mu \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j \right] \right\}$$

بالتعويض عن صيغ المشتقات كما يلي:

إذا  $i = 1$  ضع

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j = \frac{-3u_i^j + 4u_{i+1}^j - u_{i+2}^j}{2h}$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j = \frac{2u_i^j - 5u_{i+1}^j + 4u_{i+2}^j - u_{i+3}^j}{h^2}$$

$$\left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j = \frac{-5u_i^j + 18u_{i+1}^j - 24u_{i+2}^j + 14u_{i+3}^j - 3u_{i+4}^j}{2h^3}$$

ما عدا ذلك إذا  $i=2,3,\dots,n-2$  ضع

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$\left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j = \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2h^3}$$

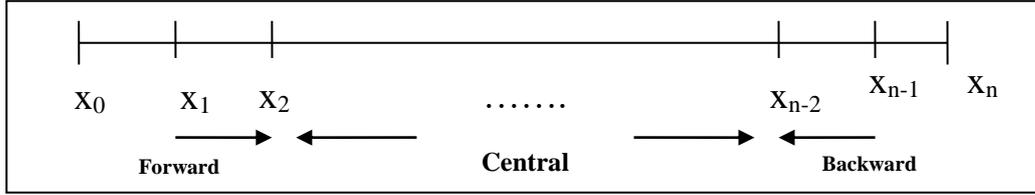
ما عدا ذلك إذا  $i=n-1$  ضع

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j &= \frac{3u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j}{2h} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j &= \frac{2u_i^j - 5u_{i-1}^j + 4u_{i-2}^j - u_{i-3}^j}{h^2} \\ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i^j &= \frac{5u_i^j - 18u_{i-1}^j + 24u_{i-2}^j - 14u_{i-3}^j + 3u_{i-4}^j}{2h^3} \end{aligned}$$

الخطوة 6: أخرج الحل التقريبي  $U$  لـ  $u$ .  
الخطوة 7: توقف.

### 5. التطبيق العملي Application

سنناقش في هذه الفقرة النتائج العددية لطرائق الفروقات المنتهية المتمثلة بالطريقة الضمنية الكاملة (Fully Implicit Scheme) وطريقة الفروقات الأسية المنتهية (Exponential Finite Difference)، لغرض حل معادلة KdV-B عددياً مع الشروط الحدودية والابتدائية المتمثلة بالمعادلة (2). إذ تم استخدام معالجة مقترحة طبقت على الطريقتين أي تم تقسيم الحل إلى خمس خطوات الأولى، عند الشرط الحدودي الأول والثانية عند نقطة المشبك  $x_1$  والثالثة عند نقاط المشبك  $x_2, x_3, \dots, x_{n-2}$  والرابعة عندما  $x_{n-1}$  والخامسة عند الشرط الحدودي الثاني. وكما موضح في الشكل (1).



الشكل (1). يوضح المعالجة المقترحة لإيجاد الحل خلال نقاط المشبك

كما تمت مقارنة الحلول العددية للطريقتين مع الحل التحليلي لمعادلة KdV-Burger's الذي ظهر لأول مرة للمعادلة في بعدين من لدن الباحث Wen-xiu وتم تعديله من لدن الباحث El-Danaf [4] ليأخذ صيغة البعد الواحد التالية:

$$u(x,t) = \frac{12v^2}{\varepsilon\mu} \left[ 1 - \frac{e^{\frac{2v}{\varepsilon\mu}(x-wt)}}{(e^{\frac{v}{\varepsilon\mu}(x-wt)} + E)^2} \right], \quad w = \frac{12v^2}{25\mu}$$

إذ أن  $E$  هو ثابت موجب،  $\varepsilon$  هو معامل الجزء غير الخطي،  $v$  معامل التبديد،  $\mu$  هو معامل التشييت.

ولغرض التوضيح نأخذ المثال التالي: [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

$$u(0,t) = 1, \quad u(220,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u_x(0,t) = u_x(220,t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u_{xx}(0,t) = u_{xx}(220,t) = 0, \quad t \geq 0$$

والشرط الابتدائي هو

$$u(x,0) = \frac{12v^2}{\varepsilon \mu} \left[ 1 - \frac{\frac{2vx}{e^{\varepsilon \mu}}}{\left(\frac{vx}{e^{\varepsilon \mu}} + E\right)^2} \right], \quad w = \frac{12v^2}{25\mu}$$

وسيتم أخذ قيم المعلمات  $E = 1000, \varepsilon = 6, v = 1, \mu = 2$  مع خطوة الزمن  $k = 0.02$ ، وخطوة الطول  $h = 4.4$ . لنحصل على النتائج المبينة في الجدول والشكل الآتي:

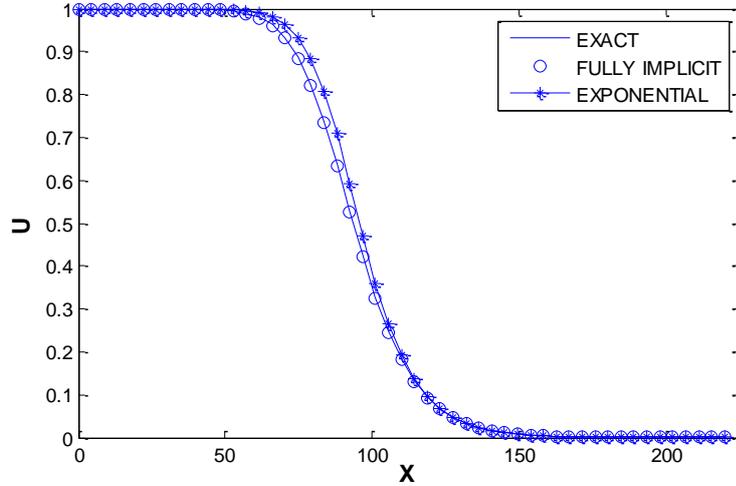
**الجدول (1).** يوضح الحلول العددية ومقدار الخطأ لكل من الطريقة الضمنية الكاملة والطريقة الأسية مع الحل

التحليلي عند الزمن  $t = 0.78$

X	Exact	Fully Implicit	Error	Exponential	Error
0	0.999999032624044	0.999998712256139	3.20368E-07	0.999998766149803	2.66474E-07
4.4	0.999997987668127	0.999997903333935	8.43342E-08	0.999998083519912	9.58518E-08
8.8	0.999995815566631	0.999995619471871	1.96095E-07	0.999997913418975	2.09785E-06
13.2	0.999991303736930	0.999990899159164	4.04578E-07	0.999996101408924	4.79767E-06
17.6	0.999981941505814	0.999981102419637	8.39086E-07	0.999991974194164	1.00327E-05
22	0.999962543185285	0.999960806129813	1.73706E-06	0.999983337163270	2.0794E-05
26.4	0.999922435654783	0.999918848682515	3.58697E-06	0.999965416131520	4.29805E-05
30.8	0.999839762871690	0.999832382743685	7.38013E-06	0.999928315649784	8.85528E-05
35.2	0.999670094545501	0.999654989381921	1.51052E-05	0.999851703686165	0.000181609
39.6	0.999324053347861	0.999293369216703	3.06841E-05	0.999694066765786	0.000370013
44	0.998624533375440	0.998562873571399	6.16598E-05	0.999371365235314	0.000746832
48.4	0.997228080288785	0.997106077750193	0.000122003	0.998715529918503	0.00148745
52.8	0.994488864716713	0.994252712185175	0.000236153	0.997396222016609	0.002907357
57.2	0.989244681920124	0.988801447843384	0.000443234	0.994779941663109	0.00553526
61.6	0.979530965685836	0.978733580239306	0.000797385	0.989693377210444	0.010162412
66	0.962311166706003	0.960955626911133	0.00135554	0.980068196775228	0.01775703
70.4	0.933465525563381	0.931322774493811	0.002142751	0.962509472310757	0.029043947
74.8	0.888425167385377	0.885326039328458	0.003099128	0.932015622444632	0.043590455
79.2	0.823719042351667	0.819672787187269	0.004046255	0.882431483828123	0.058712441
83.6	0.739056639779843	0.734325942167770	0.004730698	0.808501284421371	0.069444645
88	0.638699687922964	0.633749477963090	0.00495021	0.709641986135487	0.070942298
92.4	0.530834559717686	0.526164098674638	0.004670461	0.593029910539086	0.062195351
96.8	0.425000681730879	0.420971787502659	0.004028894	0.472101626572020	0.047100945
101.2	0.329144067201218	0.325909541872948	0.003234525	0.360496367454479	0.0313523
105.6	0.247920354282644	0.245458662542005	0.002461692	0.266676463794935	0.01875611
110	0.182653772630981	0.180848198952491	0.001805574	0.192946414345514	0.010292642
114.4	0.132305894441087	0.131012793240828	0.001293101	0.137558342374382	0.005252448
118.8	0.094632924363880	0.093720186414245	0.000912738	0.097133669509687	0.002500745
123.2	0.067065926261973	0.066427049747052	0.000638877	0.068162379881568	0.001096454
127.6	0.047215517392239	0.046770407654858	0.00044511	0.047637229124000	0.000421712
132	0.033084341541377	0.032775005747224	0.000309336	0.033202776582897	0.000118435
136.4	0.023105613565871	0.022890919326204	0.000214694	0.023100262471113	5.35109E-06
140.8	0.016099047410125	0.015950141414386	0.000148906	0.016051999473230	4.70479E-05
145.2	0.011198895369784	0.011095655132758	0.00010324	0.011145017300485	5.38781E-05
149.6	0.007781383240044	0.007709817541510	7.15657E-05	0.007733672986539	4.77103E-05
154	0.005402503514222	0.005352899354652	4.96042E-05	0.005364405805103	3.80977E-05

198	0.000138643935011	0.000137375736548	1.2682E-06	0.000137383255941	1.26068E-06
202.4	0.000096088945770	0.000095210016775	8.78929E-07	0.000095213615223	8.75331E-07
206.8	0.000066595015765	0.000065986251834	6.08764E-07	0.000065987937233	6.07079E-07
211.2	0.000046153758633	0.000045738860362	4.14898E-07	0.000045739270743	4.14488E-07
215.6	0.000031986769380	0.000031646727393	3.40042E-07	0.000031647132589	3.39637E-07
220	0.000022168293733	0.000020016028352	2.15227E-06	0.000020028812713	2.13948E-06

يوضح الجدول (1) النتائج العددية ومقدار الخطأ لكل من الطريقتين مع الحل التحليلي عندما  $t = 0.78$ . والشكل (1) يوضح السلوك الفيزيائي للحل العددي الذي يمثل موجة صدمة تتحد (تتناقص) رتيباً (Monotonically) من أعلى قيمة إلى أقل قيمة للحل.



الشكل (3). يوضح الحل العددي للطريقتين مع الحل التحليلي عند الزمن  $t = 0.78$

## 6. الاستنتاجات:

من المعروف أن معادلة Korteweg-de Vries- Burger's من المعادلات المهمة في التطبيقات الفيزيائية غير إنها تعد من النماذج الصعبة للمعادلات غير الخطية وتحتاج إلى جهد كبير لغرض إيجاد الحل العددي لها كما تحتاج إلى دقة كبيرة في معالجة المشتقة الثالثة واختيار ثوابت المعادلة. عند إيجاد الحل العددي لاحظنا كيفية معالجة المشتقة الثالثة وتقادي النقاط التي تظهر خارج حدود منطقة الحل عند إيجاد الحل عند العقد الثانية والعقدة ما قبل الأخيرة ولغرض إيجاد الحل عندها تظهر لدينا نقاط خارجية لا يمكن إيجاد قيمها باستخدام الشروط الحدودية إذ أن هذه المعالجة المقترحة نجحت في تحسين الحل العددي والمحافظة على خواص الطرق، ندرج أدناه أهم الاستنتاجات التي توصلنا إليها.

1. لغرض الحصول على حلول منتظمة ورتبية وبدقة عالية وخطأ قليل يجب اختيار قيمة كل من  $\nu$  و  $\mu$  بحيث تحقق العلاقة  $\nu^2 / 4 \cdot \mu \ll 1$ .
2. لغرض الحصول على استقرار عالية للحلول العددية نختار قيمة  $\nu$  صغيرة جداً بحيث تكون أقل من قيمة كل من  $\mu$  و  $\epsilon$ .
3. الطريقة الضمنية أفضل من الطريقة الأسية بسبب استقراريتها وعدم وجود أي شرط أو قيد على خطوة الزمن أو الطول.

المصادر

- [1] Bahadir, A. Refik, (2005), “Exponential Finite-Difference Method Applied to Korteweg-de Vries Equation for Small Times”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.160,pp.675-682.
- [2] Bhatta, Dambaru ,(2008), “Use of Modified Bernstein Polynomials to Solve KdV-Burgers Equation Numerically”, *Elsevier, Applied Mathematics and Computation*, 206, 457-464.
- [3] Duffy , Daniel J. (2006) , **Finite Difference Methods in Financial Engineering A Partial Differential Equation Approach**, England, The Atrium, Southern Gate, Chi-Chester, West Sussex PO19 8SQ, *John Wiley & Sons Ltd*.
- [4] El-Danaf, Talaat S. Aly,(2002), “Numerical solution of the Korteweg-de Vries-Burgers equation by using Quintic Spline Method”, *Studia Univ. Babeş–Bolyai, Mathematica*, Vol.XLVII, No.2.pp.41-54.
- [5] Handschuh, Robert F. and Theo G. Keith Jr.,(1988), “Applications of an Exponential Finite Difference Technique”, *NASA, Technical Memorandum 100939, AVSCOM, Technical Memorandum88-C-004*.
- [6] Handschuh, Robert F.,(1987), “An Exponential Finite Difference Technique for Solving Partial Differential Equations ”, Toledo, *Uni. of Ohio, NASA, Technical Memorandum 89874,M.S. Thesis*.
- [7] Helal, M.A. and Mehanna, M.S.,(2006), “A comparison between two different methods for solving KdV–Burgers equation”, *Chaos, Solitons and Fractals*,Vol.28, pp.320–326.
- [8] Lapidus, Leon and George, F.P.,(1982), **Numerical Solution of partial Differential Equation in Science and Engineering** , *John Wiley and Sons, Inc*.